## PROBLEMAS

1. Demonstre, usando as definições geométricas das operações de Álgebra Vetorial, as seguintes equações (em muitos casos um diagrama é suficiente): (a) Eq. (3.7), (b) Eq. (3.17), (c) Eq. (3.26), (d) Eq. (3.27), *(e) Eq. (3.35).

2. Demonstre, usando as definições algébricas das operações de Álgebra Vetorial, em termos dos componentes, as seguintes equações: (a) Eq. (3.8), (b) Eq. (3.17), (c) Eq. (3.27), (d) Eq. (3.34), (e) Eq. (3.35).

3. Deduza a Eq. (3.32) por cálculo direto, usando a Eq. (3.10) para representar $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, e utilizando as Eqs. (3.25) até (3.31).

4. a) Demonstre que $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ é o volume de um paralelepípedo, cujas arestas, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, têm sinal positivo ou negativo, de acordo com um parafuso de rosca direita: se girar de $\boldsymbol{A}$ para $\boldsymbol{B}$ e avançar ao longo de $\boldsymbol{C}$ na direção positiva e com sinal negativo se avançar na direção negativa. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ são três vetores quaisquer que não pertencem ao plano.

b) Use este resultado para demonstrar geometricamente a Eq. (3.34). Mostre que o primeiro e o segundo membros da Eq. (3.34) são iguais em sinal e em módulo.

5. Demonstre as seguintes desigualdades, dando, para cada uma, uma demonstração geométrica e outra algébrica (em termos de componentes):

a) $$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \leq |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|.$$

b) $$|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}| \leq |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|.$$

c) $$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| \leq |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|.$$

6. a) Obtenha uma fórmula análoga à Eq. (3.40) para o módulo da soma de três forças $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ e $\boldsymbol{F}_3$, em termos de $F_1$, $F_2$ e $F_3$ e dos ângulos $\theta_{12}$, $\theta_{23}$ e $\theta_{31}$ entre pares de forças. [Use as sugestões que seguem a Eq. (3.40).]

b) Obtenha uma fórmula, em relação às mesmas grandezas, para o ângulo $\alpha_1$, entre a força total e a força componente $\boldsymbol{F}_1$.

7. Demonstre as Eqs. (3.54) e (3.55), a partir da definição (3.52), para diferençar vetores.

8. Demonstre as Eqs. (3.56) e (3.57), a partir da definição algébrica (3.53), para diferençar vetores.

9. Forneça definições convenientes, análogas às Eqs. (3.52) e (3.53), para obter a integral de uma função vetorial $\boldsymbol{A}(t)$ em relação ao escalar $t$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{A}(t)\, dt.$$



Escreva um conjunto de equações idênticas às Eqs. (3.54) a (3.57), expressando as propriedades algébricas que se deve esperar para tal integral. Demonstre na base de uma ou de outra definição que

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \boldsymbol{A}(t)\, dt = \boldsymbol{A}(t).$$

10. Um triângulo isósceles, $ABC$, reto, de 45°, tem uma hipotenusa $AB$ de comprimento $4a$. Uma partícula é submetida a uma força que a atrai para o ponto $O$ localizado sobre a hipotenusa, à distância $a$ do ponto $A$. O módulo da força é igual a $k/r^2$, onde $r$ é a distância da partícula ao ponto $O$. Calcule o trabalho realizado por esta força quando a partícula se move de $A$ para $C$ e para $B$ ao longo dos dois catetos do triângulo. Faça os cálculos usando os dois métodos, um baseado na Eq. (3.61) e o outro baseado na Eq. (3.63).

11. Uma partícula desloca-se em torno de um semicírculo de raio $R$, a partir da extremidade $A$ do diâmetro para a outra extremidade $B$. Ela é atraída em direção ao ponto de partida $A$ por uma força proporcional à sua distância de $A$. Quando a partícula está em $B$, a força na direção de $A$ é igual a $F_0$. Calcule o trabalho realizado contra esta força, quando a partícula se move em torno do semicírculo de $A$ para $B$.

12. Uma partícula é submetida à ação de uma força cujos componentes são:

$$F_x = ax^3 + bxy^2 + cz,$$

$$F_y = ay^3 + bx^2y,$$

$$F_z = cx.$$

Calcule o trabalho realizado por esta força, quando a partícula se move ao longo de uma linha reta a partir da origem até o ponto $(x_0, y_0, z_0)$.

13. a) Uma partícula no plano $xy$ é atraída para a origem por uma força $F = k/y$, inversamente proporcional à sua distância do eixo $x$. Calcule o trabalho realizado pela força quando a partícula se desloca do ponto $x = 0$, $y = a$ para o ponto $x = 2a$, $y = 0$, ao longo do caminho que segue os lados de um retângulo e que consiste num segmento paralelo ao eixo $x$ de $x = 0$, $y = a$ até $x = 2a$, $y = a$ e num segmento vertical a partir do último ponto até o eixo $x$.

b) Calcule o trabalho realizado pela mesma força, quando a partícula se move ao longo de uma elipse de semi-eixos $a$ e $2a$. [*Sugestão*. Faça $x = 2a \operatorname{sen}\theta$, $y = a\cos\theta$.]

14. Determine o componente $r$ e $\theta$ de $d\boldsymbol{a}/dt$ em coordenadas polares planas, onde $\boldsymbol{a}$ é a aceleração da partícula.

15. Determine os componentes de $d^2\boldsymbol{A}/dt^2$ em coordenadas polares cilíndricas, sendo o vetor $\boldsymbol{A}$ uma função de $t$ e estando localizado em ponto móvel.

16. Determine os componentes de $d^2\boldsymbol{r}/dt^3$ em coordenadas esféricas.

*17. a) As coordenadas parabólicas planas $f$ e $h$ são definidas em termos das coordenadas cartesianas $x$ e $y$ pelas equações

$$x = f - h, \qquad y = 2(fh)^{1/2},$$

onde $f$ e $h$ são sempre positivos. Determine $f$ e $h$ em termos de $x$ e $y$. Considere os vetores unitários $\hat{f}$ e $\hat{h}$ definidos na direção de crescimento de $f$ e $h$, respectivamente, isto é, $\hat{f}$ é um vetor unitário na direção em que um ponto se deslocaria caso a coordenada $f$ crescesse ligeiramente, enquanto a coordenada $h$ permanecesse constante. Mostre que $\hat{f}$ e $\hat{h}$ são perpendiculares entre si em cada ponto. [*Sugestão*. $\hat{f} = (\hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy)[(dx)^2 + (dy)^2]^{-1/2}$, quando $df > 0$, $dh = 0$. Por quê?]

b) Mostre que $\hat{f}$ e $\hat{h}$ são funções de $f$ e $h$ e determine suas derivadas em relação a $f$ e $h$. Mostre que $r = f^{1/2}(f+h)^{1/2}\hat{f} + h^{1/2}(f=h)^{1/2}\hat{h}$. Determine os componentes da velocidade e da aceleração em coordenadas parabólicas.

18. Uma partícula desloca-se ao longo da parábola

$$y^2 = 4f_0^2 - 4f_0x,$$

onde $f_0$ é uma constante. Sua velocidade $v$ também é constante. Determine os componentes de sua velocidade e de sua aceleração em coordenadas retangulares e em coordenadas polares. Mostre que a equação da parábola em coordenadas polares é

$$r\cos^2\frac{\theta}{2} = f_0.$$

Qual a equação desta parábola em coordenadas parabólicas? (Probl. 17.)

19. Uma partícula desloca-se em velocidade variável ao longo de uma curva arbitrária sobre o plano $xy$. Deve-se especificar a posição da partícula pela distância $s$, em que ela se deslocou, a partir de um ponto fixo localizado na curva. Seja $\hat{\tau}(s)$ um vetor unitário tangente à curva no ponto $s$, na direção crescente de $s$. Mostre que

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{\hat{\nu}}{r},$$

onde $\hat{\nu}(s)$ é um vetor unitário perpendicular à curva, no ponto $s$, e $r(s)$ é o raio de curvatura no ponto $s$, definido como a distância da curva ao ponto de interseção de duas normais próximas. Derive, então, as seguintes fórmulas para a velocidade e a aceleração da partícula:

$$v = \dot{s}\hat{\tau}, \qquad a = \ddot{s}\hat{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{r}\hat{\nu}.$$

20. Usando as propriedades do símbolo vetorial $\nabla$, obtenha as seguintes identidades:

$$\text{rot}\,(\text{rot}\,A) = \text{grad}\,(\text{div}\,A) - \nabla^2 A,$$

$$u\,\text{grad}\,v = \text{grad}\,(uv) - v\,\text{grad}\,u.$$



651

Depois escreva o componente $x$ relacionado a cada membro destas equações e mostre por cálculo direto que elas são iguais em cada caso. (Tome cuidado, quando usar a primeira identidade em coordenadas curvilíneas, de levar em conta nos vetores unitários a dependência apropriada das coordenadas.)

21. Calcule rot $A$ em coordenadas cilíndricas. ✓

22. Se a partícula do Probl. 12 desloca-se em velocidade $v$, qual é o impulso fornecido pela força?

23. a) Admitindo-se que a partícula do Probl. 11 se desloque em velocidade constante $v$ em torno do semicírculo, determine os componentes retangulares $F_x(t)$ e $F_y(t)$ da força adicional que deve agir sobre a partícula, além da força dada no Probl. 11. Tome o eixo $x$ ao longo do diâmetro $AB$.

b) Calcule o impulso fornecido pela força adicional.

24. Uma partícula de massa $m$ desloca-se em velocidade constante $v$ em torno de um círculo de raio $r$, partindo no instante $t = 0$ de um ponto $P$ colocado sobre o círculo. Determine o momento angular em relação ao ponto $P$, em qualquer instante $t$, a força e o torque em relação a $P$, verificando se o movimento satisfaz o Teorema do Momento Linear (3.140).

25. Uma partícula de massa $m$ move-se de acordo com as equações

$v_x = 2at$
$v_y = 3bt^2$
$v_z = c$

$$x = x_0 + at^2, \qquad y = bt^3, \qquad z = ct.$$

$L = m(2at + 3bt^2 + c) \times (x_0 + at^2 + bt^3 + ct)$

$L = 2mabt^4 - mcx_0$

Determine o momento angular $L$ em qualquer instante $t$. Determine a força $F$ e, a partir dela, determine o torque $N$ sobre a partícula. Verifique se o movimento satisfaz o Teorema do Momento Angular (3.144).

26. Dê uma definição apropriada para o momento angular de uma partícula em relação a um eixo no espaço. Tomando o eixo especificado como o eixo $z$, expresse o momento angular em coordenadas cilíndricas. Se a força sobre a partícula tiver componentes em coordenadas cilíndricas $F_z$, $F_p$ e $F_\varphi$, mostre que a taxa de variação do momento angular em relação ao eixo $z$ é igual ao torque em relação a este eixo.

27. Uma partícula de massa $m$ em movimento é localizada por meio de coordenadas esféricas $r(t)$, $\theta(t)$ e $\varphi(t)$. Os componentes de uma força sobre a partícula, $F_r$, $F_\theta$ e $F_\varphi$, são expressas em coordenadas esféricas. Calcule os componentes esféricos do vetor momento angular e do vetor torque em relação à origem, mostrando por cálculo direto que se pode obter a equação

$$\frac{dL}{dt} = N$$

a partir das equações de movimento, de Newton.

28. As soluções mostradas na Fig. 3.28 correspondem às duas primeiras das Eqs. (3.151). Se $\theta_x = 0$ avalie $\theta_y$ para o caso em que $\omega_x = 2\omega_y$, como é mostrado na figura. Esboce a figura correspondente para o caso em que $\theta_x = \theta_y$. Esboce uma figura típica para o caso em que $4\omega_x = 3\omega_y$.

29. Determine a correção de ordem mais baixa para a Eq. (3.179), fazendo $x_m = (mv_{x_0}/b)(1-\delta)$ e resolvendo a Eq. (3.175) para obter $\delta$, admitindo que $\delta \ll 1$ e $bv_{z_0}/mg \gg 1$. [*Sugestão*. Os cálculos algébricos não são difíceis, mas você deve escolher cuidadosamente quais são os termos mais importantes neste caso-limite.]

30. Determine a altura máxima $Z_{máx}$ alcançada por um projetil, cuja equação de movimento é a Eq. (3.169). Expanda o resultado em uma série de potências de $b$, mantendo os termos de $z_{máx}$ até a primeira ordem em $b$, e compare o termo de ordem mais baixa com a Eq. (3.167).

31. Um projetil é disparado da origem em velocidade inicial igual a $v_0 = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$. A velocidade do vento é $v_w = w\hat{y}$. Resolva as equações de movimento (3.180) e obtenha $x$, $y$ e $z$ como funções do tempo $t$. Determine o ponto $x_1$ e $y_1$ em que o projetil retornará ao plano horizontal, mantendo somente os termos em $b$. Mostre que, caso a resistência do ar e a velocidade do vento sejam desprezadas quando se aponta o canhão, apenas a resistência do ar fará com que o projetil caia antes do alvo, numa fração igual a $4bv_{z_0}/3mg$ da distância do alvo, e que o vento provoca um erro adicional na coordenada $y$ de $2bwv_{z_0}^2/(mg^2)$.

32. Obtenha o termo seguinte aos que aparecem nas Eqs. (3.176) e (3.178).

33. Um projetil é disparado da origem num plano $xz$ (o eixo $z$ é vertical) com velocidade inicial $v_0$ para atingir um alvo no ponto $x = x_0$, $z = 0$.

a) Desprezando a resistência do ar, determine o ângulo de elevação correto para o canhão. Mostre que, em geral, existem dois ângulos que satisfazem esta condição, a não ser que o alvo esteja no ponto de alcance máximo ou além dele.

b) Determine a correção de primeira ordem para o ângulo de elevação devido à resistência do ar.

34. Mostre que as forças indicadas nos Probls. 11 e 12 são conservativas, determinando a energia potencial e utilizando-a para calcular o trabalho realizado em cada um dos casos.

35. Diga quais das seguintes forças são conservativas e determine a energia potencial para as que o forem:



a) $F_x = 6abz^3y - 20bx^3y^2$, $F_y = 6abxz^3 - 10bx^4y$, $F_z = 18abxz^2y$.

b) $F_x = 18abyz^3 - 20bx^3y^2$, $F_y = 18abxz^3 - 10bx^4y$, $F_z = 6abxyz^2$.

c) $F = \hat{x}F_x(x) + \hat{y}F_y(y) + \hat{z}F_z(z)$.

36. Determine a energia potencial de cada uma das seguintes forças, caso seja conservativa:

a) $F_x = 2ax(z^3 + y^3)$, $F_y = 2ay(z^3 + y^3) + 3ay^2(x^2 + y^2)$, $F_z = 3az^2(x^2 + y^2)$.

b) $F_\rho = a\rho^2 \cos\varphi$, $F_\varphi = a\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$, $F_z = 2az^2$.

c) $F_r = -2ar \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$, $F_\theta = -ar\cos\theta\cos\varphi$, $F_\varphi = ar\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$.

37. Determine a energia potencial de cada uma das seguintes forças caso seja conservativa:

a) $F_x = axe^{-R}$, $F_y = bye^{-R}$, $F_z = cze^{-R}$, onde $R = ax^2 + by^2 + cz^2$.

b) $F = Af(A \cdot r)$, onde $A$ é um vetor constante e $f(s)$ é qualquer função apropriada de $s = A \cdot r$.

c) $F = (r \times A)f(A \cdot r)$.

38. Uma partícula é atraída em direção ao eixo $z$ por uma força $F$ proporcional ao quadrado de sua distância ao plano $xy$ e inversamente proporcional à sua distância ao eixo $z$. Some uma força adicional perpendicular a $F$, de forma a tornar conservativa a força total; determine a energia potencial. Certifique-se que escreveu as expressões para a força e para energia potencial dimensionalmente corretas.

39. Mostre que $F = \hat{r}F(r)$ é uma força conservativa, mostrando por cálculo direto que a integral

$$\int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr$$

ao longo de qualquer caminho entre $r_1$ e $r_2$ depende somente de $r_1$ e $r_2$. [*Sugestão*. Expresse $F$ e $dr$ em coordenadas esféricas.]

40. Determine os componentes das forças para as seguintes funções energia potencial:

a) $V = axy^2z^3$.

b) $V = \frac{1}{2}kr^2$.

c) $V = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2 + \frac{1}{2}k_z z^2$.

41. Determine a força que age sobre o elétron em um íon da molécula de hidrogênio para o qual o potencial é

$$V = -\frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2},$$

onde $r_1$ é a distância do elétron ao ponto $y = z = 0$, $x = -a$ e $r_2$ é a distância do elétron ao ponto $y = z = 0$, $x = a$.

42. Determine a função energia potencial que se anula quando $r \to \infty$ e que resulta numa força $F = -k\mathbf{r}$ quando $r \to 0$. Determine a força. Verifique, resolvendo as integrais de linha apropriadas, se o trabalho realizado pela força sobre a partícula, quando se desloca de $\mathbf{r} = 0$ para $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, é o mesmo quando a partícula se desloca em linha reta ou sobre o caminho mostrado na Fig. 3.32.

43. A energia potencial para um oscilador harmônico isotrópico é

$$V = \tfrac{1}{2}kr^2.$$

Faça um gráfico da energia potencial efetiva para o deslocamento em $r$, quando uma partícula de massa $m$ se move com esta energia potencial e com momento angular $L$ em relação à origem. Discuta que tipos de movimentos são possíveis, descrevendo-os de maneira tão completa quanto possível sem obter a solução. Determine a freqüência de revolução para o movimento circular e a freqüência radial para pequenas oscilações em torno do movimento circular. Depois, descreva a natureza das órbitas que diferem ligeiramente das órbitas circulares.

44. Determine a freqüência, no caso de pequenas oscilações radiais em torno do movimento circular estacionário, para o potencial efetivo, dado pela Eq. (3.232), de uma força atrativa proporcional ao inverso do quadrado da distância, mostrando que é igual à freqüência de revolução.

45. Determine $r(t)$ e $\theta(t)$ para a órbita da partícula do Probl. 43. Compare com as órbitas encontradas na Seç. 3.10 no caso de oscilador harmônico tridimensional.

46. Uma partícula de massa $m$ move-se sob a ação de uma força central cujo potencial é

$$V(r) = Kr^4, \qquad K > 0.$$

Para que energia e momento angular a órbita será um círculo de raio $a$ em torno da origem? Qual é o período deste movimento circular? Deslocando-se ligeiramente a partícula deste movimento circular, qual será o período das pequenas oscilações radiais em torno de $r = a$?

47. De acordo com a Teoria das Forças Nucleares, de Yukawa, a força entre um nêutron e um próton tem o seguinte potencial:

$$V(r) = \frac{Ke^{-ar}}{r}, \qquad K < 0.$$

a) Determine a força, comparando-a com a força da lei do inverso do quadrado da distância.

b) Discuta os tipos de movimento que podem ocorrer, caso uma partícula de massa $m$ se desloque sob a ação de tal força.

c) Discuta como este movimento deve diferir do movimento correspondente para uma força proporcional ao quadrado da distância.



d) Determine $L$ e $E$ para o movimento em círculo de raio $a$.

e) Determine o período do movimento circular e o período de pequenas oscilações radiais.

f) Mostre que as órbitas aproximadamente circulares são quase fechadas quando $a$ é muito pequeno.

48. Resolva a equação orbital (3.22) para o caso em que $F = 0$. Mostre que a sua resposta concorda com a primeira lei de Newton.

49. Ver-se-á, no Cap. 6 (Probl. 7), que a distribuição uniforme de poeira de densidade $\rho$, em torno do Sol, resulta na soma da atração gravitacional desse astro sobre um planeta de massa $m$ a uma força de atração central adicional

$$F' = -mkr,$$

onde

$$k = \frac{4\pi}{3}\rho G.$$

a) Se a massa do Sol for $M$, determine a velocidade angular de revolução do planeta em órbita circular de raio $r_0$; determine a freqüência angular para pequenas oscilações radiais. A seguir, mostre que se $F'$ for muito menor que a atração devido ao Sol, uma órbita quase circular será aproximadamente uma elipse, cujo eixo maior tem um lento movimento de precessão e cuja velocidade angular é

$$\omega_p = 2\pi\rho\left(\frac{r_0^3 G}{M}\right)^{1/2}.$$

b) O movimento de precessão do eixo se faz na mesma direção, ou em direção oposta, à velocidade angular? Substitua $M$ e o raio da órbita de Mercúrio, e calcule a densidade de poeira necessária para provocar uma precessão de 41 segundos de arco por século.

50. a) Discuta, usando o método do potencial efetivo, os tipos de movimentos que se pode esperar para uma força atrativa central inversamente proporcional ao cubo do raio:

$$F(r) = -\frac{K}{r^3}, \qquad K > 0.$$

b) Determine o intervalo de energias e o momento angular para cada tipo de movimento.

c) Resolva a equação orbital (3.222), mostrando que a solução tem uma das formas seguintes:

$$\frac{1}{r} = A \cos [\beta(\theta - \theta_0)], \tag{1}$$

$$\frac{1}{r} = A \cosh [\beta(\theta - \theta_0)], \tag{2}$$

$$\frac{1}{r} = A \operatorname{senh} [\beta(\theta - \theta_0)], \tag{3}$$

$$\frac{1}{r} = A(\theta - \theta_0), \tag{4}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} e^{\pm \beta\theta}. \tag{5}$$

d) Para que valores de $L$ e $E$ cada um desses movimentos ocorre? Expresse as constantes $A$ e $B$ em termos de $E$ e $L$ em cada caso.

e) Faça um gráfico da órbita típica de cada um dos tipos acima.

51. a) Discuta os possíveis movimentos para a seguinte força central:

$$F(r) = -\frac{K}{r^2} + \frac{K'}{r^3}.$$

Admita que $K > 0$ e considere ambos os sinais para $K'$.

b) Resolva a equação orbital, mostrando que as órbitas ligadas têm a forma (se $L^2 > -mK'$)

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos \alpha\theta}.$$

c) Mostre que esta é uma elipse que tem movimento de precessão; determine a velocidade angular de precessão e diga se a precessão está na mesma direção ou na direção oposta è velocidade angular orbital.

52. O Sputnik I tinha um perigeu (ponto de maior aproximação da Terra) de 227 km acima da superfície terrestre. Neste ponto, sua velocidade era de 28 710 km/h. Determine a distância (máxima) do apogeu acima da superfície terrestre e o período de revolução. (Suponha que a Terra é uma esfera e despreze a resistência do ar. Você necessita somente saber o valor de $g$ e do raio da Terra para resolver o problema.)

53. O perigeu do Explorer I era de 360 km e o apogeu de 2 549 km acima da superfície terrestre. Determine a sua distância acima da superfície da Terra, quando ele passava sobre um ponto situado a 90° em torno do planeta a partir de seu perigeu.

54. Observa-se um cometa a uma distância de $1{,}00 \times 10^8$ km do Sol, viajando em direção a ele à velocidade de 51,6 km por segundo, num ângulo de 45° em relação ao raio do Sol. Escreva a equação para a órbita do cometa, em coordenadas polares, com a origem no Sol e o eixo $x$ passando pela posição em que o cometa foi observado. (A massa solar é $2{,}00 \times 10^{30}$ kg.)



55. Pode-se mostrar (Cap. 6, Probls. 17 e 21) que a correção na energia potencial de uma massa $m$, no campo gravitacional terrestre, devido à forma achatada dos pólos da Terra, em coordenadas esféricas, relativa ao eixo polar, é aproximadamente

$$V' = -\frac{\eta m M G R^2}{5r^3}(1 - 3\cos^2\theta),$$

onde $M$ é a massa da Terra e $2R$, $2R(1-\eta)$ são os diâmetros equatorial e polar. Calcule a taxa de precessão do perigeu (ponto de maior aproximação) de um satélite da Terra que se mova em órbita aproximadamente circular no plano equatorial. Substitua os diâmetros equatorial e polar da Terra e determine a taxa de precessão, em graus por revolução, do satélite a 645 km de distância em relação à Terra.

*56. Calcule o torque sobre um satélite terrestre, devido à correção da energia potencial calculada no Probl. 55. O satélite move-se em órbita circular de raio $r$, cujo plano está de tal maneira inclinado que a sua normal faz um ângulo $\alpha$ com o eixo polar. Suponha que a órbita seja muito pouco afetada em uma revolução e calcule o torque médio durante uma revolução. Mostre que o efeito de tal torque é fazer com que a normal ao plano tenha um movimento de precessão em torno de um cone de meio ângulo $\alpha$ em torno do eixo polar e determine uma fórmula para a taxa de precessão, em graus por revolução. Calcule esta taxa para um satélite colocado a 645 km acima da Terra, usando valores apropriados para $M$, $\eta$ e $R$.

57. Pode-se mostrar que a órbita dada pela Teoria da Relatividade, especial para partículas de massa $m$, movendo-se sob a ação de uma energia potencial $V(r)$, é a mesma que a órbita que a partícula seguiria de acordo com a Mecânica Newtoniana, caso a energia potencial fosse igual a

$$V(r) - \frac{[E - V(r)]^2}{2mc^2},$$

onde $E$ é a energia (cinética mais potencial) e $c$, a velocidade da luz. Discuta a natureza das órbitas para uma força proporcional ao quadrado da distância, de acordo com a Teoria da Relatividade. Mostre, comparando a velocidade angular orbital com a freqüência de oscilações radiais para movimentos aproximadamente circulares, que as órbitas aproximadamente circulares, quando a correção relativística é pequena, são elipses, e calcule a velocidade angular de precessão. [Veja a Eq. (14.101).]

58. A distância de periélio (mais próxima) ao Sol do planeta Marte é de $2{,}06 \times 10^8$ km, e a distância do afélio (máxima) é de $2{,}485 \times 10^8$ km. Suponha que a Terra se mova no mesmo plano em círculo cujo raio tem $1{,}49 \times 10^8$ km e um período de um ano. A partir destes dados, determine a velocidade de Marte no periélio. Suponha que uma nave espacial Mariner seja lançada de forma que seu periélio esteja na órbita terrestre e o

seu afélio, no periélio de Marte. Determine a velocidade do Mariner relativa a Marte, no ponto onde eles se encontram. Qual deles tem a velocidade mais elevada? Qual deles tem a maior velocidade angular durante o período de vôo?

59. O Mariner 4 deixou a Terra numa órbita cuja distância de periélio ao Sol era aproximadamente a distância da Terra ao Sol ($1{,}49 \times 10^8$ km), e cuja distância de afélio era aproximadamente a distância entre Marte e o Sol. Com que velocidade relativa à Terra ele partiu? Com que velocidade ele deve deixar a Terra (relativa à Terra) para que escape totalmente da atração gravitacional do Sol? (Não serão necessários dados adicionais para resolver este problema, exceto o tempo correspondente a um ano, admitindo-se que a Terra se mova em circunferência.)

60. a) Um satélite deve ser lançado da superfície terrestre. Suponha que a Terra seja uma esfera de raio $R$ e despreze o atrito com a atmosfera. O satélite deve ser lançado num ângulo $\alpha$ com a vertical, à velocidade $v_0$, de maneira que a sua velocidade seja horizontal a uma altura $h_1$ acima da superfície da Terra. O último estágio do foguete aplica, então, um impulso horizontal, fornecendo uma velocidade adicional $\Delta v_1$ à velocidade do satélite. A órbita final deve ser uma elipse com perigeu $h_1$ (ponto de maior aproximação) e apogeu $h_2$ (ponto mais afastado), medidos a partir da superfície da Terra. Determine a velocidade inicial $v_0$ necessária e a velocidade adicional $\Delta v_1$, em termos de $R$, $\alpha$, $h_1$, $h_2$ e $g$, a aceleração da gravidade na superfície da Terra.

b) Deduza uma fórmula para a variação $\delta h_1$ na altura do perigeu devido a um pequeno erro $\delta\beta$ na direção do impulso final, até a ordem $(\delta\beta)^2$.

61. Dois planetas movem-se num mesmo plano, em circunferência de raios $r_1$ e $r_2$, em torno do Sol. Uma nave espacial deve ser lançada do planeta 1 com velocidade $v_1$ relativa ao planeta, de maneira a permanecer em órbita do planeta 2. (A velocidade $v_1$ é a velocidade relativa depois que a nave escapou do campo gravitacional do planeta.) Mostre que $v_1$ é um mínimo para uma órbita elíptica, cujos periélio e afélio são $r_1$ e $r_2$. Neste caso, determine $v_1$ e a velocidade relativa $v_2$ entre a nave espacial e o planeta 2, caso a nave atinja o raio $r_2$, no instante apropriado para interceptar o planeta 2. Expresse o seu resultado em termos de $r_1$, $r_2$ e tempo de duração de um ano $Y_1$ do planeta 1. Procure os valores apropriados de $r_1$ e $r_2$ e estime o valor de $v_1$ para viagens a Vênus e Marte, partindo da Terra.

62. Um foguete acha-se em órbita elíptica em torno da Terra, perigeu $r_1$, apogeu $r_2$, medidos a partir do centro da Terra. Em certo ponto de sua órbita, o motor é ligado durante um tempo curto para fornecer um acréscimo $\Delta v$ na velocidade que coloca o foguete em órbita e que permite escapar à velocidade $v_0$ relativa à Terra. (Despreza qualquer efeito devido ao Sol ou à Lua.) Mostre que $\Delta v$ é um mínimo, se o impulso for aplicado no perigeu e paralelo à velocidade orbital. Determine $\Delta v$ para este caso, em termos dos parâmetros da órbita elíptica $\epsilon$ e $a$; a aceleração $g$; a distância $R$ do centro da Terra e a velocidade final $v_0$. Você pode explicar, sob as leis da Física, porque $\Delta v$ será tanto menor quanto maior for $\epsilon$?



63. Um satélite move-se em torno da Terra em órbita que passa pelos pólos. O instante em que ele cruza cada paralelo de latitude é marcado de tal forma que a função $\theta(t)$ é conhecida. Mostre como se pode determinar o perigeu, o semi-eixo maior e a excentricidade de sua órbita, em termos de $\theta(t)$, e do valor de $g$ na superfície terrestre. Suponha que a Terra seja uma esfera de raio $R$.

64. Uma partícula de massa $m$ move-se em órbita elíptica de eixo maior igual a $2a$, excentricidade $\epsilon$, de maneira que o raio da partícula em relação ao centro da elipse varre áreas em taxa constante

$$\frac{dS}{dt} = C,$$

e no período $\tau$ independente de $a$ e $\epsilon$.

a) Escreva a equação da elipse, em coordenadas polares, com a origem no centro da elipse.

b) Mostre que a força que atua sobre a partícula é uma central; e determine $F(r)$ em termos de $m$ e $\tau$.

65. Mostre que a fórmula (3.276) para a seção de choque de Rutherford também é válida quando uma das cargas é negativa.

66. Uma partícula é refletida na superfície de uma esfera sólida, de raio $R$, de maneira que as linhas de trajetória de incidência e de reflexão da partícula estejam num plano comum com o raio da esfera que liga o ponto de impacto e formam ângulos iguais com este raio. Determine a seção de choque $d\sigma$ para espalhamento por meio de um ângulo entre $\Theta$ e $\Theta + d\Theta$. Integre $d\sigma$ em todos os ângulos e mostre que a seção de choque total é igual $\pi R^2$.

67. Explore a analogia $u, \theta \leftrightarrow x, t$ entre as Eqs. (3.222) e (2.39) para obter uma solução da Eq. (3.222) análoga à solução (2.46) da Eq. (2.39). Use a sua solução para mostrar que o ângulo de espalhamento $\Theta$ (Fig. 3.42) para uma partícula submetida a uma força central $F(r)$ é dada por

$$\Theta = \left|\pi - 2s\int_0^{u_0}\left[1 - s^2u^2 - V(u^{-1})/(\tfrac{1}{2}mv_0^2)\right]^{-1/2} du\right|,$$

onde $V(r = u^{-1})$ é a energia potencial

$$V(r) = \int_r^{\infty} F(r)\,dr,$$

$s$ é o parâmetro de impacto e $u_0$ é o valor de $u$ para o qual a grandeza entre colchetes se anula. [Este problema não é difícil, se você lembrar claramente o significado físico e geométrico das diversas grandezas envolvidas em cada passo da solução.]

68. Mostre que a esfera sólida, definida no Probl. 66, pode ser representada como um caso-limite de uma força central onde

$$V(r) = \begin{matrix} 0, \text{ se } r > R, \\ \infty, \text{ se } r < R, \end{matrix}$$

isto é, mostre que este potencial fornece a lei de reflexão, especificada no Probl. 66. Em seguida, use o resultado do Probl. 67 para resolver o 66.

69. Use o resultado do Probl. 67 para derivar a fórmula (3.276) para a seção de choque de Rutherford.

**70.** Um foguete, movendo-se com velocidade inicial $v_0$, em direção à Lua, tem massa $M$ e raio $r_0$. Determine a seção de choque $\sigma$ necessária para atingir a Lua. Considere-a em repouso e ignore todos os outros corpos.

**71.** Mostre que para uma força central repulsiva, proporcional ao inverso do raio ao cubo,

$$F(r) = \frac{K}{r^3}, \qquad K > 0,$$

as órbitas têm a forma (1) dada no Probl. 50; expresse $\beta$, em termos de $K$, $E$, $L$, e a massa $m$ da partícula incidente. Mostre que a seção de choque para espalhamento através de um ângulo entre $\Theta$ e $\Theta + d\Theta$, para partículas submetidas a esta força, é

$$d\sigma = \frac{2\pi^3 K}{mv_0^2} \frac{\pi - \Theta}{\Theta^2(2\pi - \Theta)^2} d\Theta.$$

**72.** Uma partícula de carga $q$ e massa $m$, em repouso num campo magnético $\boldsymbol{B} = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$, é submetida, no instante $t = 0$, a um campo elétrico oscilante

$$\boldsymbol{E} = E_0\hat{\boldsymbol{x}} \text{ sen } \omega t.$$

Determine o seu movimento.

**73.** Resolva o Probl. 72 para o caso em que $\omega = qB_0/mc$.

**74.** Uma partícula carregada desloca-se num campo elétrico e magnético uniforme e constante. Mostre que introduzindo-se uma nova variável

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2} ct,$$

a equação de movimento para $\boldsymbol{r}'$ é a mesma que para $\boldsymbol{r}$ exceto que o componente $E$ perpendicular a $\boldsymbol{B}$ é eliminado.

**75.** Uma partícula de carga $q$, em um magnetron cilíndrico, move-se num campo magnético uniforme

$$\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}},$$



e num campo elétrico, dirigido radialmente para fora ou para dentro de um fio central ao longo do eixo $z$,

$$\boldsymbol{E} = \frac{a}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}},$$

onde $\rho$ é a distância ao eixo $z$, e $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ é o vetor unitário dirigido radialmente para fora a partir do eixo $z$. As constantes $a$ e $B$ podem ser positivas ou negativas.

a) Escreva as equações do movimento em coordenadas cilíndricas.

b) Mostre que a grandeza

$$m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{qB}{2c}\rho^2 = K$$

é uma constante de movimento.

c) Usando este resultado, faça uma análise qualitativa, baseada na integral da energia, dos tipos de movimento que podem ocorrer. Considere todos os casos, incluindo todos os valores de $a$, $B$, $K$ e $E$.

d) Sob que condições pode ocorrer o movimento circular em torno do eixo?

e) Qual é a freqüência de pequenas oscilações radiais em torno deste movimento circular?

**76.** Um seletor de velocidades para um feixe de partículas carregadas de massa $m$ e carga $e$ deve ser projetado para selecionar partículas cuja velocidade particular é $v_0$. O seletor de velocidades utiliza um campo elétrico uniforme $E$ na direção $x$ e um campo magnético uniforme $B$ na direção $y$. O feixe emerge de uma fenda estreita, ao longo do eixo $y$, e desloca-se na direção $z$. Depois de passar através de um campo cruzado a uma distância $l$, o feixe passa através de uma segunda fenda paralela à primeira e também no plano $yz$. Os campos $E$ e $B$ são escolhidos de tal maneira que as partículas, em velocidade apropriada, movem-se paralelamente ao eixo $z$ não experimentando nenhuma força.

a) Se a partícula partir da origem em velocidade $v_0$ formando um pequeno ângulo em direção $z$, determine o ponto em que ela chegará no plano $z = l$. Suponha que o ângulo inicial seja suficientemente pequeno para permitir que se desprezem termos de segunda ordem destes ângulos.

b) Qual a melhor escolha entre $E$ e $B$ para que uma fração, a maior possível, das partículas em velocidade $v_0$, chegue à segunda fenda, enquanto partículas em outras velocidades passem o mais longe possível da fenda?

c) Se a largura da fenda for $h$, qual é o desvio máximo $\delta v$ da velocidade $v_0$ para que uma partícula, cujo movimento inicial seja ao longo do eixo $z$, possa ainda atravessar a segunda fenda? Suponha que os valores de $E$ e $B$ sejam os escolhidos no item (b).