

tos resultados importantes podem, então, ser deduzidos sem que realmente se precise calcular as séries ou as integrais.

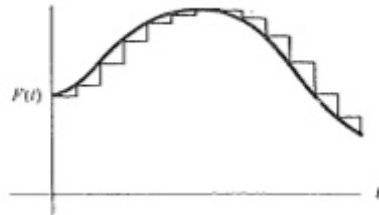


Fig. 2.8 Representação de uma força como a soma de impulsos. Curva espessa:  $F(t)$ . Curva fina:  $\sum_n F_n(t)$ .

Um método de solução conhecido como método de Green baseia-se na solução (2.190) para forças do tipo impulso. Pode-se pensar em qualquer força  $F(t)$  como a soma de uma série de impulsos, cada uma agindo durante um intervalo curto de tempo  $\delta t$  e gerando um impulso  $F(t)\delta t$ :

$$F(t) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(t), \quad (2.207)$$

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < t_n, \\ F(t_n), & \text{se } t_n \leq t \leq t_{n+1}, \\ 0, & \text{se } t > t_{n+1}. \end{cases} \quad \text{onde } t_n = n \delta t, \quad (2.208)$$

Quando  $\delta t \rightarrow 0$ , a soma de todas as forças de impulso  $F_n(t)$  convergirá para  $F(t)$ . (Veja Fig. 2.8.) De acordo com o Teorema 4 e a Eq. (2.190), a solução da Eq. (2.197) para uma força dada pela Eq. (2.207) é

$$x(t) \doteq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(t_n) \delta t}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t_n)} \text{sen} [\omega_1(t-t_n)], \quad (2.209)$$

onde  $t_{n_0} \leq t < t_{n_0+1}$ . Deixando-se  $\delta t \rightarrow 0$  e fazendo  $t_n = t'$ , a Eq. (2.209) torna-se

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{F(t')}{m\omega_1} e^{-\gamma(t-t')} \text{sen} [\omega_1(t-t')] dt'. \quad (2.210)$$

A função

$$G(t, t') = \begin{cases} 0, & \text{se } t' > t, \\ \frac{e^{-\gamma(t-t')}}{m\omega_1} \text{sen} [\omega_1(t-t')], & \text{se } t' \leq t, \end{cases} \quad (2.211)$$

é denominada *função de Green* para a Eq. (2.197). Em termos da função de Green,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') F(t') dt', \quad (2.212)$$

Se a força  $F(t)$  é igual a zero para  $t < t_0$ , então a solução (2.210) será  $x(t) = 0$  para  $t < t_0$ . Esta solução já estava ajustada às condições iniciais: o oscilador em repouso antes da aplicação da força. Para qualquer outra condição inicial, um transiente dado pela Eq. (2.133), com os valores apropriados de  $A$  e  $\theta$ , deve ser somado à solução anterior. O valor da solução (2.210) é grande no estudo do comportamento transiente de sistemas mecânicos ou elétricos, quando submetidos à ação de um número variado de tipos de forças.

## PROBLEMAS

1. a) A taxa máxima de consumo de combustível de um motor a jato ao desenvolver uma impulsão (força) é de  $1,492 \times 10^4$  N. Sabendo-se que ele opera com impulsão máxima durante o levantamento de vôo, calcule a potência (em cavalos-vapor) gerada pelo motor do avião quando a velocidade do avião é 10 m/s, 50 m/s e 150 m/s (1 cavalo-vapor = 746 watts).

b) Um motor de pistões, ao alcançar sua taxa máxima de consumo de combustível, desenvolve uma potência constante de 500 HP. Calcule a força que ele aplica sobre o avião durante o levantamento de vôo, quando a velocidade é igual a 10 m/s, 50 m/s e 150 m/s.

2. Uma partícula de massa  $m$  está sujeita à ação de uma força  $F$ . Em  $t = 0$ , sua velocidade é igual a zero. Use o Teorema do Momento Linear para determinar a velocidade em qualquer tempo  $t$  posterior. Calcule a energia da partícula em qualquer tempo posterior, usando as Eqs. (2.7) e (2.8) e verifique se os resultados concordam.

3. Uma partícula de massa  $m$  está sujeita à ação de uma força dada pela Eq. (2.192). (Nessa equação,  $\delta t$  é um intervalo de tempo pequeno e fixo.) Determine o impulso total gerado pela força durante o tempo  $-\infty < t < \infty$ . Se sua velocidade inicial (em  $t \rightarrow -\infty$ ) for  $v_0$ , qual a velocidade final (em  $t \rightarrow \infty$ )? Use o Teorema do Momento Linear.

4. Um próton de alta velocidade e carga elétrica  $e$  desloca-se a velocidade constante  $v_0$  sobre uma linha reta próxima a um elétron de massa  $m$  e carga  $-e$ , inicialmente em repouso. O elétron encontra-se à distância  $a$  da trajetória do próton.

a) Suponha que o próton passe pelo elétron tão rapidamente que este não tenha tempo suficiente para deslocar-se a uma distância apreciável até que o próton esteja muito longe. Mostre que a componente de força em direção perpendicular à linha sobre a qual o próton se desloca é

$$F = \frac{e^2 a}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + v_0^2 t^2)^{3/2}}, \quad (\text{unidades MKS})$$

onde  $t = 0$ , quando o próton alcança a distância de maior aproximação do elétron.

- Calcule o impulso gerado por esta força.
- Usando estes resultados, calcule (aproximadamente) o momento linear final e a energia cinética final do elétron.
- Mostre que a condição para que a suposição original no item (a) seja válida é  $(e^2/4\pi\epsilon_0) \ll \frac{1}{2}mv_0^2$ .

5. Uma partícula de massa  $m$  em repouso em  $t = 0$  está submetida à força  $F(t) = F_0 \sin^2 \omega t$ .

- Esboce a forma que se deve esperar para  $v(t)$  e  $x(t)$ , para vários períodos de oscilação da força.
- Determine  $v(t)$  e  $x(t)$  e compare com o seu esboço anterior.

6. Uma partícula de massa  $m$  e velocidade inicial  $v_0$  está sujeita a uma força  $F(t)$  que começa em  $t = 0$ , como a mostrada na Fig. 2.9.

- Faça um esboço mostrando  $F(t)$  e a força esperada de  $v(t)$  e  $x(t)$ .
- Ache uma função simples  $F(t)$  que tenha esta forma, e determine  $x(t)$  e  $v(t)$ .

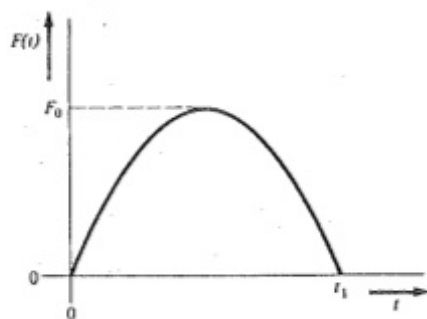


Fig. 2.9 Força apresentada no Probl. 6.

7. Uma partícula, cuja velocidade original seja  $v_0$ , está sujeita à força dada pela Eq. (2.191).

- Determine  $v(t)$  e  $x(t)$ .
- Mostre que, quando  $\delta t \rightarrow 0$ , o movimento se aproxima de um movimento a velocidade constante que muda abruptamente sua velocidade em  $t = t_0$  de uma quantidade de  $p_0/m$ . ( $\delta t$  é um intervalo de tempo fixo.)

8. Um microfone, constituído de um diafragma de massa  $m$  e área  $A$ , está suspenso de forma a poder mover-se livremente em direção perpendicular ao diafragma. Uma on-

da sonora causa um impacto sobre o diafragma fazendo com que a pressão em sua face frontal seja

$$p = p_0 + p' \sin \omega t.$$

Suponha que a pressão na face posterior permaneça constante e igual à pressão atmosférica  $p_0$ . Desprezando todas as outras forças, com exceção daquela devido à diferença de pressão através do diafragma, determine o seu movimento. Num microfone real existe uma força restauradora que age sobre o diafragma que o impede de se deslocar para muito longe. Como se desprezou esta força aqui, nada o impedirá de deslocar-se, sem parar, a velocidade constante. Evite esta dificuldade escolhendo a velocidade inicial de tal forma que o movimento seja puramente oscilatório. Se a voltagem de saída do microfone for proporcional à pressão do som  $p'$  e independente de  $\omega$ , como deverá depender da amplitude e da frequência do movimento do diafragma?

9. Um cabo-de-guerra é seguro por dois grupos de cinco homens, cada um. Cada homem pesa 70 kg e pode puxar o cabo inicialmente com uma força de 100 N. Inicialmente os dois grupos estão compensados, mas quando os homens cansam, a força com que cada um puxa o cabo decresce de acordo com a relação

$$F = (100 \text{ N})e^{-t/\tau},$$

onde o tempo médio para atingir o cansaço é de 10 s para um grupo e 20 s para o outro. Determine o movimento. Suponha que nenhum dos homens solte o cabo ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ). Qual a velocidade final dos dois times? Qual das suposições é responsável por este resultado não razoável?

10. Uma partícula inicialmente em repouso está sujeita, começando em  $t = 0$ , a uma força

$$F = F_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta).$$

- Determine o seu movimento.
- Como a velocidade final depende de  $\theta$  e de  $\omega$ ? [Sugestão. Os cálculos algébricos serão simplificados escrevendo-se  $\cos(\omega t + \theta)$  em termos de funções exponenciais complexas.]

11. Um barco cuja velocidade inicial é  $v_0$  é desacelerado por uma força de atrito

$$F = -bv^2.$$

- Determine o seu movimento.
- Determine o tempo e a distância necessária para parar o barco.

12. Um barco é desacelerado por uma força  $F(v)$ . Sua velocidade decresce de acordo com a fórmula

$$v = C(t - t_1)^2,$$

onde  $C$  é uma constante e  $t_1$  é o tempo que ele leva para parar. Determine a força  $F(v)$ .

13. Um motor a jato desenvolve uma impulsão constante máxima  $F_0$ , sendo usado para impulsionar um avião cuja força de atrito é proporcional ao quadrado da velocidade. Se o avião iniciar seu movimento em  $t = 0$  a velocidade desprezível e acelerar com a impulsão máxima, determine a sua velocidade  $v(t)$ .

14. Suponha que o motor de um avião de massa  $m$  impulsionado a hélice fornece uma potência constante  $P$  à sua aceleração máxima. Determine a força  $F(v)$ . Desprezando o atrito, use o método discutido na Sec. 2.4 para determinar a velocidade e a posição do avião, quando ele é acelerado ao longo da pista, partindo do repouso em  $t = 0$ . Verifique os resultados obtidos para a velocidade, usando o teorema da energia. Em que aspectos as suposições usadas neste problema não são realistas em relação à Física? Em que aspectos as respostas mudariam se fossem adotadas suposições mais realistas?

15. O motor de um carro de corrida de massa  $m$  fornece uma potência constante  $P$  em sua aceleração máxima. Supondo que o atrito seja proporcional à velocidade, ache uma expressão para  $v(t)$ , quando o carro é acelerado, a partir do repouso, com a potência máxima. A sua solução comporta-se corretamente quando  $t \rightarrow \infty$ ?

16. a) Um corpo de massa  $m$  desliza sobre uma superfície horizontal áspera. O coeficiente de atrito estático é  $\mu_s$  e o coeficiente de atrito de deslizamento,  $\mu$ . Determine uma função analítica,  $F(v)$ , para representar a força de atrito, que tenha o valor constante apropriado, em velocidades apreciáveis, e reduz-se ao valor estático em velocidades muito baixas.

b) Ache o movimento sob a ação da força que você determinou, no caso de o corpo partir com velocidade  $v_0$ .

17. Determine  $v(t)$  e  $x(t)$  para uma partícula de massa  $m$  que inicia o seu movimento em  $x_0 = 0$  a velocidade  $v_0$  e submetido à ação de uma força dada pela Eq. (2.31) com  $n \neq 1$ . Determine o tempo necessário para a partícula parar, a distância percorrida até parar, verificando os comentários apresentados no último parágrafo da Sec. 2.4.

18. Uma partícula de massa  $m$  está sujeita à ação de uma força

$$F = -kx + kx^3/a^2$$

onde  $k$  e  $a$  são constantes.

a) Determine  $V(x)$  e discuta os possíveis tipos de movimento que possam ocorrer.

b) Mostre que se  $E = \frac{1}{4} ka^2$ , a integral na Eq. (2.46) pode ser resolvida por métodos elementares. Determine  $x(t)$  para este caso, escolhendo  $x_0$  e  $t_0$  de maneira conveniente. Mostre que os seus resultados concordam com a discussão qualitativa do item (a) para esta energia.

19. Uma partícula de massa  $m$  é repelida da origem por uma força inversamente proporcional ao cubo de sua distância à origem. Escreva e resolva a equação do movimen-

to, considerando que a partícula está inicialmente em repouso a uma distância  $x_0$  da origem.

20. Uma massa  $m$  está conectada à origem por meio de uma mola de constante  $k$ , cujo comprimento, quando relaxada, é igual a  $l$ . A força restauradora é aproximadamente proporcional à distância em que a mola foi esticada ou comprimida, admitindo-se que não seja esticada ou comprimida demais. Entretanto, quando a mola é comprimida demais, a força cresce rapidamente, de tal forma que é impossível comprimi-la até um tamanho menor do que a metade do seu comprimento, quando em repouso. Quando a mola é esticada num tamanho maior do que duas vezes o seu comprimento, quando relaxada, ela começa a enfraquecer, e a força restauradora torna-se igual a zero quando esticada em comprimentos muito grandes.

a) Determine uma função força  $F(x)$  que represente este comportamento. (Uma mola real deforma-se, se esticada demais, de tal maneira que  $F$  se torna função da sua história anterior, mas você deve supor que  $F$  depende somente de  $x$ .)

b) Determine  $V(x)$  e descreva os movimentos que podem ocorrer.

21. Uma partícula de massa  $m$  acha-se sob a ação de uma força cuja energia potencial é

$$V = ax^2 - bx^3.$$

a) Determine a força.

b) A partícula parte da origem  $x = 0$  com velocidade  $v_0$ . Mostre que, se  $|v_0| < v_c$ , onde  $v_c$  é uma certa velocidade crítica, a partícula permanecerá confinada à região próxima da origem. Determine  $v_c$ .

22. Uma partícula alfa de um núcleo acha-se presa por um potencial cuja forma é mostrada na Fig. 2.10.

a) Descreva os possíveis tipos de movimento.

b) Escreva uma função  $V(x)$  que tenha esta forma geral e tenha os valores  $-V_0$  e  $V_1$  em  $x = 0$  e  $x = \pm x_1$ , determinando a força correspondente.

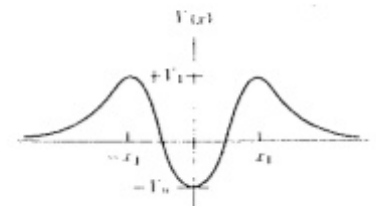


Fig. 2.10

23. Uma partícula está sujeita à ação da força

$$F = -kx + \frac{a}{x^3}$$

a) Determine o potencial  $V(x)$ , descreva a natureza das soluções e determine a solução  $x(t)$ .

b) Você pode dar uma interpretação simples do movimento quando  $E^2 \gg ka$ ?

24. Uma partícula de massa  $m$  está sujeita à ação de uma força dada por

$$F = B \left( \frac{a^2}{x^2} - \frac{28a^5}{x^5} + \frac{27a^8}{x^8} \right)$$

A partícula desloca-se somente ao longo do eixo dos  $x$  positivos.

a) Determine e esboce a energia potencial. ( $B$  e  $a$  são positivos.)

b) Descreva os tipos de movimento que podem ocorrer. Localize todas as posições de equilíbrio e determine a frequência para pequenas oscilações, em torno de qualquer um dos pontos de equilíbrio estável.

c) Uma partícula inicia seu movimento em  $x = 3a/2$  com uma velocidade  $v = -v_0$ , onde  $v_0$  é positivo. Qual o menor valor de  $v_0$  para o qual a partícula eventualmente pode escapar para uma distância muito grande? Descreva o movimento neste caso. Qual é a velocidade máxima que a partícula terá? Qual a sua velocidade em um ponto muito afastado do ponto de partida?

25. A energia potencial para a força existente entre dois átomos, numa molécula diatômica, tem a seguinte forma aproximada:

$$V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$$

onde  $x$  é a distância entre os átomos e  $a$  e  $b$  são constantes positivas.

a) Determine a força.

b) Supondo-se que um dos átomos seja muito pesado e permaneça em repouso enquanto o outro se move ao longo de uma linha reta, descreva os movimentos possíveis.

c) Determine a distância de equilíbrio e o período para pequenas oscilações, em torno da posição de equilíbrio, se a massa do átomo mais leve for  $m$ .

26. Ache a solução para o movimento de um corpo sujeito à ação de uma força linear repulsiva  $F = kx$ . Mostre que este tipo de movimento é o esperado em torno de um ponto de equilíbrio instável.

27. Uma partícula de massa  $m$  move-se num poço de potencial dado por

$$V(x) = \frac{-V_0 a^2 (a^2 + x^2)}{8a^4 + x^4}$$

a) Esquematize  $V(x)$  e  $F(x)$ .

b) Discuta os movimentos que podem ocorrer. Localize todos os pontos de equilíbrio e determine a frequência para pequenas oscilações em torno de qualquer um dos pontos de equilíbrio estável.

c) Uma partícula inicia o seu movimento a uma grande distância do poço de potencial com velocidade  $v_0$ , em direção ao poço. Quando passa pelo ponto  $x = a$ , sofre uma colisão com outra partícula, durante a qual ela perde uma fração  $\alpha$  de sua energia cinética. Qual deve ser o valor de  $\alpha$  para que a partícula permaneça presa no poço após a colisão? Qual o valor de  $\alpha$  para que a partícula seja aprisionada num dos lados do poço de potencial? Determine os pontos de retorno do novo movimento se  $\alpha = 1$ .

28. Resolva a Eq. (2.65) usando cada um dos três métodos discutidos nas Seções 2.3, 2.4 e 2.5.

29. Derive as soluções (2.74) e (2.75) para um corpo em queda livre sujeito à ação de uma força de atrito proporcional ao quadrado da velocidade.

30. Um corpo de massa  $m$  sai do repouso impulsionada por um meio que exerce sobre ele um atrito de arrastamento (força)  $be^{\alpha|v|}$ .

a) Determine sua velocidade  $v(t)$ .

b) Qual a velocidade terminal?

c) Expanda o resultado obtido, em série de potências de  $t$ , mantendo termos até  $t^2$ .

d) Por que a solução não concorda com a Eq. (1.28), mesmo no caso de pequenos intervalos de tempo  $t$ ?

31. Um projétil é disparado verticalmente para cima com velocidade  $v_0$ . Determine seu movimento, admitindo a existência de um atrito de arrastamento proporcional ao quadrado da velocidade ( $g$  constante).

32. Derive equações análogas às Eqs. (2.85) e (2.86) para o movimento de um corpo cuja velocidade é maior do que a de escape. [Sugestão. Faça  $\beta = (Ex/mMG)^{1/2}$ .]

33. Determine o movimento de um corpo projetado da Terra, na vertical, a velocidade igual à velocidade de escape. Despreze a resistência do ar.

34. A partir da igualdade  $e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$ , obtenha as fórmulas para  $\sin 2\theta$  e  $\cos 2\theta$  em termos de  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ .

35. Escreva  $\cos \theta$  de acordo com a fórmula (2.122) e derive a seguinte relação

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos 3\theta + \frac{3}{4} \cos \theta.$$

36. Determine as soluções gerais das equações

a)  $m\ddot{x} + b\dot{x} - kx = 0,$

b)  $m\ddot{x} - b\dot{x} + kx = 0.$

Interprete fisicamente estas equações e suas soluções, supondo que elas sejam as equações de movimento de uma partícula.

37. Mostre que quando  $\omega_0^2 - \gamma^2$  é muito pequeno, a solução subamortecida (2.133) é igual à solução criticamente amortecida (2.146), para um pequeno intervalo de tempo. Qual a relação entre as constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $A$ ,  $\theta$ ? Este resultado sugere como alguém pode descobrir as soluções adicionais (2.143) no caso crítico.

38. Um vagão de carga pesando  $10^4$  kg rola livremente e chega ao final de sua linha à velocidade de 2 m/s. No final, existe um batentê que consiste numa mola com  $k = 1,6 \times 10^4$  kg/s<sup>2</sup>. O vagão comprime a mola. Considerando que a força de atrito seja proporcional à velocidade, determine a constante de amortecimento  $b_c$  para o amortecimento crítico. Esboce o deslocamento  $x(t)$  e determine a distância máxima em que a mola é comprimida (para  $b = b_c$ ). Mostre que, se  $b \geq b_c$ , o vagão parará, mas se  $b < b_c$ , o vagão será lançado de volta e se deslocará em sentido contrário sobre os trilhos. (Note que o vagão não se encontra preso à mola. Durante o tempo em que ele está em contato com a mola, ele se move de acordo com a equação de um oscilador harmônico, mas, após perder o contato, ele se moverá sobre os trilhos em sentido contrário ao inicial.)

39. Uma massa submetida a uma força restauradora linear  $-kx$  e a um amortecimento  $-b\dot{x}$  desloca-se a uma distância  $x_0$  da posição de equilíbrio, sendo largada com velocidade inicial igual a zero. Determine os movimentos para os casos de subamortecimento, amortecimento crítico e superamortecimento.

40. Resolva o Probl. 39 para o caso em que a massa parte de sua posição de equilíbrio a velocidade  $v_0$ . Esboce o movimento para os três casos.

41. Resolva o Probl. 39 para o caso em que a massa sofre um deslocamento inicial  $x_0$  e uma velocidade inicial  $v_0$  orientada na direção do ponto de equilíbrio. Mostre que se  $|v_0| > |\gamma_1 x_0|$ , a massa ultrapassará a posição de equilíbrio, nos casos de amortecimento crítico e superamortecimento, de modo que os comentários feitos no final da Seç. 2.9 não se aplicam a este caso. Esboce os movimentos para este caso.

42. Deseja-se construir uma balança de banheiro cuja deflexão da plataforma tem 2,5 cm quando pesa um homem 91 kg. Se o movimento for criticamente amortecido, determine a constante  $k$  da mola que deve ser usada e a constante de amortecimento  $b$ . Mostre que o movimento será superamortecido para uma pessoa mais leve. Se um homem de 91 kg subir na balança, qual a força máxima para cima que a plataforma da balança exercerá sobre os pés dele, enquanto a plataforma voltar para a posição de repouso?

43. Uma massa de 1 000 kg cai de uma altura de 10 m sobre uma plataforma de massa desprezível. Deseja-se desenhar uma mola e um amortecedor sobre os quais a platafor-

ma será montada, de tal forma que ela possa atingir uma nova posição de equilíbrio 0,2 m abaixo da posição original tão depressa quanto possível, depois de sofrer o impacto, porém sem ultrapassá-la.

a) Determine a constante  $k$  da mola e a constante de amortecimento  $b$  do amortecedor. Certifique-se que a solução  $x(t)$  encontrada satisfaz as condições iniciais corretas e que não ultrapasse a posição de equilíbrio.

b) Determine, até dois algarismos significativos, o tempo necessário para que a plataforma chegue a 1 mm de sua posição final.

44. Uma força  $F_0 e^{-at}$  age sobre um oscilador harmônico de massa  $m$ , a constante da mola  $k$  e a constante de amortecimento  $b$ . Determine uma solução particular da equação do movimento, partindo da suposição de que existe uma solução com a mesma dependência do tempo que a força aplicada.

45. a) Determine o movimento de um oscilador harmônico amortecido, sujeito à força constante  $F_0$ , "adivinhando" uma solução estacionária da equação não-homogênea (2.91) e acrescentando uma solução da equação homogênea.

b) Resolva o mesmo problema fazendo a substituição  $x' = x - a$ , e escolhendo a constante  $a$  de forma a permitir a redução da equação em  $x'$  à equação homogênea (2.90). Mostre, em seguida, que o efeito da aplicação de uma força constante é meramente deslocar a posição de equilíbrio sem afetar a natureza das oscilações.

46. Um oscilador harmônico subamortecido é submetido à ação de uma força aplicada

$$F = F_0 e^{-at} \cos(\omega t + \theta).$$

Determine uma solução particular expressando  $F$  como parte real de uma função exponencial complexa e procurando uma solução para  $x$  que tenha a mesma dependência exponencial do tempo.

47. Um oscilador harmônico sem amortecimento ( $b = 0$ ), inicialmente em repouso, é submetido, começando em  $t = 0$ , a uma força  $F_0 \sin \omega t$ . Determine o deslocamento  $x(t)$ .

48. Um oscilador harmônico sem amortecimento ( $b = 0$ ) é submetido à ação de uma força  $F_0 \cos \omega t$ . Mostre que se  $\omega = \omega_0$ , não existirá solução estacionária. Determine uma solução particular, admitindo inicialmente uma solução para  $\omega = \omega_0 + \epsilon$ , e tomando o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . [Sugestão. Se o leitor iniciar com a solução do estado estacionário e fizer  $\epsilon \rightarrow 0$ , ela divergirá. Tente começar com uma solução que satisfaça a condição inicial  $x_0 = 0$ , de forma que ela não divirja em  $t = 0$ .]

49. Um oscilador harmônico amortecido de massa  $m$  e constante de mola  $k$  é submetido à ação de uma força  $F_0 \cos \omega t$ . Se em  $t = 0$ ,  $x = x_0$  e  $v = v_0$ , qual é  $x(t)$ ?

50. A força  $F_0 \cos(\omega t + \theta_0)$  age sobre um oscilador a partir de  $t = 0$ .
- Quais os valores iniciais de  $x$  e  $v$ , de modo que não exista transiente.
  - Se, ao contrário,  $x_0 = v_0 = 0$ , determine a amplitude  $A$  e a fase  $\theta$  do transiente em termos de  $F_0, \theta_0$ .

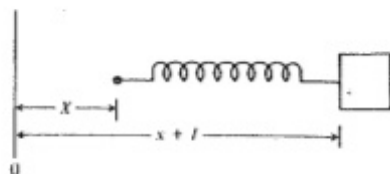


Fig. 2.11

51. Uma massa  $m$  é atada a uma mola com constante de força  $k$  e comprimento relaxado  $l$ , como é mostrado na Fig. 2.11. A extremidade esquerda da mola não é fixa e oscila com amplitude  $a$ , frequência  $\omega$ , de forma que  $X = a \sin \omega t$ , onde  $X$  é medido a partir de um ponto de referência fixo, 0. Escreva a equação do movimento e mostre que é equivalente à Eq. (2.144) com uma força aplicada  $ka \sin \omega t$ , sendo o atrito dado pela Eq. (2.31). Mostre que, se o atrito é originado por um amortecedor ligado entre as extremidades da mola, de forma que a força de amortecimento seja  $-b(\dot{x} - \dot{X})$ , então a equação do movimento terá uma força aplicada adicional  $\omega b a \cos \omega t$ .

52. Um automóvel pesando uma tonelada (incluindo passageiros, mas excluindo rodas e tudo mais abaixo das molas) desce uma polegada para cada 100 kg adicionais de passageiros. Ele se desloca a 36 km/h sobre uma estrada com ondulações senoidais, que apresenta uma distância de 30 cm entre duas elevações e uma amplitude de 5 cm (altura das elevações e dos vales em relação ao nível médio da estrada). Determine a amplitude de oscilações do automóvel, supondo que ele se mova verticalmente como um oscilador harmônico simples sem amortecimento (sem amortecedores). (Despreze a massa das rodas e das molas.) Se fossem instalados amortecedores, o carro oscilaria mais ou menos? (Use os resultados do Probl. 51.)

53. Um oscilador harmônico, sem amortecimento, de massa  $m$ , frequência natural  $\omega_0$ , está inicialmente em repouso e é submetido em  $t = 0$  a uma impulsão de forma a partir de  $x_0 = 0$  com velocidade inicial  $v_0$  e a oscilar livremente até  $t = 3\pi/2\omega_0$ . A partir deste tempo, uma força  $F = B \cos(\omega t + \theta)$  é aplicada. Determine o seu deslocamento.

54. Determine o deslocamento de uma massa submetida à ação de uma força restauradora  $-kx$  e a uma força de amortecimento  $(\pm)\mu mg$  devido ao atrito de deslizamento existente entre superfícies secas. Mostre que as oscilações são isócronas (período independente da amplitude) com a amplitude de oscilação decrescendo de  $2\mu g/\omega_0^2$  durante cada meio ciclo até que a massa atinja o repouso. [Sugestão. Use o

resultado do Probl. 45. Quando a força tem uma forma algébrica diferente, em tempos diferentes, durante o movimento, como neste caso, onde o sinal da força de amortecimento tem de ser escolhido de forma a que a força seja sempre oposta à velocidade, é necessário resolver a equação de movimento separadamente, para cada intervalo de tempo, durante o qual se deve usar uma expressão particular para força, escolhendo as condições iniciais para cada intervalo de tempo, a posição e a velocidade finais do intervalo de tempo anterior.]

55. Um oscilador harmônico sem amortecimento ( $\gamma = 0$ ), inicialmente em repouso, é submetido à ação de uma força dada pela Eq. (2.191).
- Determine  $x(t)$ .
  - No caso de um  $p_0$  fixo, para que valor de  $\delta t$  a amplitude de oscilação final é máxima?
  - Mostre que quando  $\delta t \rightarrow 0$ , a sua solução se aproxima da fornecida pela Eq. (2.190).

56. Encontre uma solução análoga à Eq. (2.190) para um oscilador criticamente amortecido, submetido a um impulso  $p_0$ , aplicado em  $t = t_0$ .

57. a) Determine, usando o princípio de superposição, o movimento de um oscilador subamortecido [ $\gamma = (1/3)\omega_0$ ] inicialmente em repouso e submetido, após  $t = 0$ , à ação da força

$$F = A \sin \omega_0 t + B \sin 3\omega_0 t,$$

onde  $\omega_0$  é a frequência natural do oscilador.

b) Qual deve ser a razão entre  $B$  e  $A$  para que as oscilações forçadas com frequência  $3\omega_0$  tenham a mesma amplitude que as oscilações cuja frequência é  $\omega_0$ ?

58. A força  $F_0(1 - e^{-at})$  age sobre um oscilador harmônico que está em repouso em  $t = 0$ . A massa é  $m$ , a constante da mola é  $k = 4ma^2$  e  $b = ma$ . Determine o movimento. Esboce  $x(t)$ .

\*59. Resolva o Probl. 58 para o caso em que  $k = ma^2$  e  $b = 2ma$ .<sup>13</sup>

60. Determine, pelo método da série de Fourier, a solução estacionária para um oscilador harmônico sujeito à força

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } nT < t \leq (n + \frac{1}{2})T, \\ F_0, & \text{se } (n + \frac{1}{2})T < t \leq (n + 1)T, \end{cases}$$

onde  $n$  é um inteiro e  $T = 6\pi/\omega_0$ , onde  $\omega_0$  é a frequência de ressonância do oscilador. Mostre que, se  $\gamma \ll \omega_0$ , o movimento é aproximadamente senoidal com período  $T/3$ .

<sup>13</sup> Usa-se um asterisco, como foi explicado no Prefácio, para indicar problemas particularmente difíceis.

61. Determine, usando a série de Fourier, o estado estacionário de um oscilador harmônico sem amortecimento, sujeito à ação de uma força que tem a forma de uma onda senoidal retificada:

$$F(t) = F_0 |\text{sen}\omega_0 t|.$$

onde  $\omega_0$  é a frequência natural do oscilador.

62. Resolva o Probl. 58 usando o método de Green (2.210).

63. Um oscilador subamortecido, inicialmente em repouso, recebe, em  $t = 0$ , a ação da força dada pela Eq. (2.191). Determine o seu movimento, usando o método de Green (2.210).

64. Usando o resultado do Probl. 56, determine, pelo método de Green, o movimento de um oscilador criticamente amortecido, inicialmente em repouso e submetido à ação de uma força  $F(t)$ .

## CAPÍTULO 3

# MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA EM DUAS OU TRÊS DIMENSÕES

### 3.1 ÁLGEBRA VETORIAL

O estudo dos movimentos em duas ou três dimensões torna-se muito mais simples quando se introduz o conceito de vetor. Define-se geometricamente vetor como uma grandeza física, caracterizada por um módulo e uma direção no espaço. Exemplos de grandezas vetoriais são a velocidade, a força e a posição em relação a uma origem fixa. Esquemáticamente, representa-se um vetor por meio de uma seta, cujos comprimento e direção representam o módulo e a direção. Neste livro, representa-se vetor por uma letra em grifo negrito. A mesma letra em grifo representa o módulo do vetor (veja Fig. 3.1), que também é representado por barras verticais envolvendo o símbolo vetorial:

$$A = |\mathbf{A}|. \quad (3.1)$$

Dois vetores são iguais quando têm o mesmo módulo e a mesma direção; o conceito de vetor não faz nenhuma referência a qualquer localização particular.<sup>1</sup>



Fig. 3.1 Um vetor  $\mathbf{A}$  e o seu módulo  $A$ .

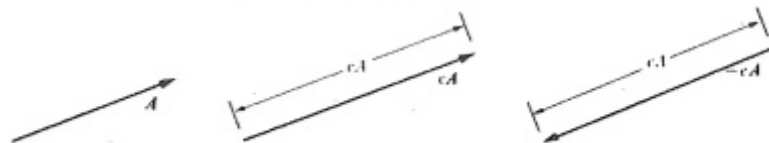


Fig. 3.2 Definição de multiplicação de vetor por escalar ( $c > 0$ ).

<sup>1</sup> Muitas vezes classificam-se os vetores em "livres", aqueles que não se localizam no espaço; "deslizantes", os que podem estar localizados em qualquer ponto ao longo de uma linha; e "fixos", os que devem estar localizados num ponto definido do espaço. Aqui, distinguem-se os vetores apenas pelo módulo e direção, de forma que dois vetores podem ser considerados iguais se tiverem o mesmo módulo e a mesma direção, independente de sua posição no espaço. No caso de uma grandeza vetorial, como força, pode ser necessário especificar o vetor não somente por seu módulo e sua direção, mas também pelo "ponto" em que ele for aplicado.