Mecânica Quântica I – Pós-Graduação IF-UFRJ – Prof. Paulo A. Maia Neto

LISTA C - 2019-2

1. **Evolução temporal de pacote de onda de partícula livre.** Considere o seguinte estado inicial de uma partícula livre em 1D, na representação de posição :

$$\psi(x,0) = C_0 \exp(ik_0 x) \exp[-x^2/(4a^2)] \tag{1}$$

   (a) Escolha um valor para a constante de normalização C_0 tal que a função de onda $\psi(x,0)$ esteja corretamente normalizada. Esboce o gráfico da densidade de probabilidade para a medida de posição e comente sobre as suas propriedades. Qual é o significado do parâmetro a ?

   (b) Determine a função de onda na representação de momento $\langle p|\psi\rangle_0 = \tilde{\psi}(p,0)$ em $t = 0$. Esboce o gráfico da densidade de probabilidade para a medida de momento e comente sobre as suas propriedades. Qual é o significado do parâmetro k_0 ?

   (c) Mostre explicitamente que os seus resultados são compatíveis com a relação de incerteza de Heisenberg.

   (d) Determine a expressão explícita da função de onda (representação de posição) no tempo t : $\psi(x,t)$. Acrescente a densidade de probabilidade para medida de posição num tempo $t > 0$ genérico ao gráfico do item (a). Discuta a velocidade do pacote de onda e a incerteza $\Delta x(t)$ no tempo t. Explique, em termos do princípio de incerteza, como o efeito de alargamento depende da largura inicial do pacote.

2. Usando a fórmula BCH (ver lista 2), calcule $\tau(\mathbf{r}_0)^\dagger\, \mathbf{R}\, \tau(\mathbf{r}_0)$ onde $\tau(\mathbf{r}_0) = \exp(-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{r}_0/\hbar)$ é o operador translação de $\mathbf{r}_0$. Interprete o seu resultado.

3. Escreva a equação de Schrödinger correspondente a um oscilador harmônico uni-dimensional na representação de momento (massa m, frequência angular ω).

4. Sakurai 2.13, 2.15, 2.16, 2.20

5. **Estados coerentes e o operador deslocamento.** Considere uma partícula de massa m num potencial harmônico uni-dimensional, de frequência angular ω.

   (a) Suponha que o estado da partícula é o estado coerente $|\alpha\rangle$. Mostre que $\langle X\rangle = x_0$ e $\langle P\rangle = p_0$, com x_0 e p_0 dados pelas equações abaixo:

$$x_0 = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}|\alpha|\cos\delta \tag{2}$$

$$p_0 = \sqrt{2m\hbar\omega}|\alpha|\sin\delta \tag{3}$$

   Determine também as incertezas de posição e momento, Δx e Δp. Mostre que os estados coerentes tem incerteza mínima. Comente sobre o caráter quasi-clássico destes estados quânticos.

(b) Determine a probabilidade p_n de obter o valor $\mathcal{E}_n = \hbar\omega(n+1/2)$ ao fazer uma medida da energia da partícula que se encontra no estado coerente $|\alpha\rangle$. Mostre que a distribuição de probabilidade é Poissoniana. Determine a energia média.

(c) Mostre que o operador $\mathcal{U}(p_0) = \exp(iXp_0/\hbar)$ realiza uma translação no espaço de momento de valor p_0.

(d) O operador

$$\hat{D}(x_0, p_0) = \mathcal{T}(x_0) \cdot \mathcal{U}(p_0), \tag{4}$$

onde $\mathcal{T}(x_0)$ é o operador translação espacial de valor x_0, representa uma combinação de translação no espaço real e no espaço dos momenta (translação no espaço de fase). Mostre que

$$\hat{D}(x_0, p_0) = \exp\left[i \operatorname{Re}(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha)\right] \exp\left[-i\sqrt{2}(\operatorname{Re}(\alpha)\tilde{P} - \operatorname{Im}(\alpha)\tilde{X})\right] \tag{5}$$

onde $\alpha = |\alpha| \exp(i\delta)$, x_0 e p_0 dados pelas eqs. (2) e (3), e

$$\tilde{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, X \tag{6}$$

$$\tilde{P} = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\, P \tag{7}$$

(e) O operador deslocamento é definido pela equação

$$D(\alpha) = \exp\left(\alpha a^\dagger - \alpha^* a\right) \tag{8}$$

Escreva os operadores $\tilde{X}$ e $\tilde{P}$ em termos dos operadores de criação e destruição a e $a^\dagger$ na equação (5) para mostrar que

$$D(\alpha) = \exp\left[-i \operatorname{Re}(\alpha) \operatorname{Im}(\alpha)\right]\, \hat{D}(x_0, p_0) \tag{9}$$

(f) Mostre que o estado coerente $|\alpha\rangle$ pode ser gerado a partir do estado fundamental pela operação de $D(\alpha)$:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle \tag{10}$$

(g) Obtenha a função de onda do estado coerente geral $|\alpha\rangle$, $\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$, usando as equações (4), (9) e (10). Compare com a função de onda do estado fundamental e escreva o seu resultado em termos de x_0 e p_0 [ver item (a) e eqs. (2) e (3)]. Comente sobre o seu resultado.

6. Calcule o propagador de uma partícula livre na representação de momento $\langle \vec{p}, t|\vec{p}\,', t'\rangle$.

7. Considere uma partícula livre não relativística de massa m. Calcule o propagador correspondente, diretamente a partir de sua expressão em termos dos autoestados do Hamiltoniano:

$$\langle \mathbf{r}_2, t_2|\mathbf{r}_1, t_1\rangle \equiv K(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \theta(t_2 - t_1) \sum_n \phi_n(\mathbf{r}_2)\phi_n^*(\mathbf{r}_1) e^{-iE_n(t_2-t_1)/\hbar}\,.$$