Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Física

MECÂNICA QUÂNTICA I - 2019-2

LISTA 2 - PRAZO 16/10/2019

1. (6,5)

   (a) Mostre que (Baker-Campbell-Hausdorff)

   $$e^A\, B\, e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]] + ... \tag{1}$$

   e obtenha o termo geral da série. Sugestão: defina $\tilde{B}(x) = e^{xA}\, B\, e^{-xA}$, obtenha uma equação diferencial da forma $d\tilde{B}(x)/dx = ...$ e a sua solução para a condição inicial $\tilde{B}(0) = B$.

   (b) Considere uma partícula de spin 1/2 na presença de um campo magnético constante, alinhado ao longo da direção do eixo z. O Hamiltoniano vale $H = \frac{\hbar\Omega}{2}\sigma_z$, onde Ω é a frequência de Larmor, proporcional ao módulo do campo. Usando a equação (1), calcule os operadores de spin de Pauli na representação de Heisenberg $\sigma_z^{(H)}(t)$ e $\sigma_x^{(H)}(t)$ em função dos operadores iniciais em $t = 0$.

2. (3,5) Mostre a regra de operação do operador posição na representação de momento $\langle p'|\hat{X}|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\psi\rangle$.

   Use este resultado para mostrar que

   $$\langle\beta|X|\alpha\rangle = \int dp'\phi_\beta^*(p') i\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p') \tag{2}$$

   onde $\phi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ e $\phi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$. Re-obtenha a equação (2) diretamente a partir do teorema de Parseval.