Mecânica Quântica I – Pós-Graduação IF-UFRJ – Prof. Paulo A. Maia Neto

LISTA B - 2019-2

1. **Série de Dyson para o operador evolução temporal.**

   Considere um Hamiltoniano geral dependente do tempo $H(t)$. Mostre que a equação diferencial para o operador evolução temporal

   $$\partial_t U(t,t_0) = -\frac{i}{\hbar} H(t)\, U(t,t_0)$$

   com condição inicial adequada (escreva!) é equivalente à equação integral

   $$U(t,t_0) = \mathbf{1} - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\, H(t')\, U(t',t_0)$$

   Em seguida, mostre, por um argumento iterativo, que a solução da equação integral é da forma (série de Dyson)

   $$U(t,t_0) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, H(t_1)H(t_2)\ldots H(t_n) \qquad (1)$$

   Argumente que na expressão (1) acima os operadores H aparecem ordenados temporalmente. Mostre que, se $[H(t), H(t')] = 0$ para todos t, t', então (1) pode ser simplificado e escrito em termos da exponencial de um operador. Obtenha esta expressão para este caso particular. Forneça um exemplo de situação em que esta condição é satisfeita, e um exemplo em que ela não é.

2. Considere uma partícula de spin 1/2 inicialmente no estado

   $$\hat{\rho}(0) = \frac{1}{2}|+\rangle_{zz}\langle+| + \frac{1}{2}|+\rangle_{xx}\langle+|$$

   (a) Determine o valor esperado $\langle\vec{\sigma}\rangle$ no tempo $t=0$. Este estado é puro ou misto? Determine a entropia linear.

   Esse sistema evolui sob a ação de um campo magnético paralelo ao eixo Oz e o Hamiltoniano vale

   $$\hat{H} = \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_z,$$

   onde o paramêtro Ω é proporcional ao módulo do campo.

   (b) Calcule o estado do sistema $\hat{\rho}(t)$ num tempo t genérico.

   (c) Ao medir σ_y no tempo t, quais são os resultados possíveis, e respectivas probabilidades? Idem para σ_x e σ_z. Determine também os valores médios no tempo t, $\langle\sigma_x\rangle_t$, $\langle\sigma_y\rangle_t$ e $\langle\sigma_z\rangle_t$. Interprete os resultados em termos da precessão de Larmor, com o auxílio de um desenho.

3. Considere uma partícula de spin 1/2 na presença de um campo magnético constante $\vec{B}$. O operador Hamiltoniano vale

$$\hat{H} = \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_n,$$

onde $\Omega = |q|\,|\vec{B}|/m$ e $\vec{n}$ é o vetor unitário paralelo a $\vec{B}$. Na base de auto-estados de $\hat{\sigma}_z$, o estado do sistema no tempo $t = 0$ é dado pela matriz densidade

$$\hat{\rho}(0) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12}^* & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

Suponha que seja possível alinhar o campo magnético $\vec{B}$ ao longo de qualquer direção $\vec{n}$ do espaço. Procuram-se estados iniciais que sejam estacionários qualquer que seja a direção escolhida (**mesmo** estado para **todas** as direções). Determine este(s) estado(s) e discuta o seu(s) significado(s).

4. A distância-traço entre dois estados associados aos operadores densidade $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ é definida pela equação

$$D(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) \equiv \frac{1}{2}||\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2||$$

onde a norma-traço de um operador $\hat{A}$ é definida como

$$||\hat{A}|| \equiv \mathrm{Tr}(\sqrt{\hat{A}^\dagger \hat{A}})$$

onde $\hat{B} = \sqrt{\hat{A}^\dagger \hat{A}}$ é o operador **positivo** tal que $\hat{B}^2 = \hat{A}^\dagger \hat{A}$.

(a) Mostre que a distância-traço entre dois estados quaisquer é invariante quando a evolução temporal é descrita por operador unitário. O que deveria ocorrer para sistemas quânticos abertos?

Nos itens a seguir, vamos aplicar esta definição para um spin 1/2.

(b) Usando a expressão obtida na lista 1,

$$\hat{\rho}_j = \frac{1}{2}\left(\hat{1} + \vec{p}_j \cdot \hat{\vec{\sigma}}\right), \quad j = 1, 2$$

determine $D(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2)$ em termos dos vetores $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$. Como aplicação , determine a distância-traço entre um certo estado $\hat{\rho}$ e o estado completamente aleatório e mostre que ela é uma medida da pureza do estado. Como segunda aplicacao do seu resultado, mostre que $D(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = 0$ se e somente se $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2$.

(c) Determine o valor máximo possível para a distância-traço entre dois estados de spin 1/2. Discuta a condição sobre os estados $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ para que a distância entre eles seja máxima.

5. Em relação à base $\mathcal{B} = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ do espaço vetorial de estados correspondente a uma partícula de spin 1, os operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são representados pelas matrizes

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

com a e b reais.

(a) $\hat{A}$ e $\hat{B}$ podem ser medidos simultaneamente? Justifique.

(b) Considere que a dinâmica do sistema físico seja descrita por um Hamiltoniano $\hat{H}$ independente do tempo. Determine a forma mais geral de $\hat{H}$ tal que $\hat{A}$ seja uma constante de movimento.

(c) Para o conjunto de operadores $\hat{H}$ obtido no item anterior, B é sempre constante de movimento? Caso negativo, determine quais são as condições adicionais sobre os operadores $\hat{H}$ obtidos no item anterior para que B seja uma constante de movimento.

(d) Obtenha uma base $\mathcal{B}'$ de autovetores simultâneos de $\hat{A}^2$ e $\hat{B}$. A medida simultânea de A^2 e B representa um teste quântico completo ou máximo, isto é, determina univocamente um estado quântico puro ? Caso negativo, justifique, caso positivo, descreva detalhadamente a determinação do estado em termos dos diferentes valores possíveis para a medida simultânea de A^2 e B.

6. Sakurai (ed. 1994), Cap. 2: 3, 9

7. Peres (ed. 1995), Cap. 8: 8.1, 8.3

8. Considere uma partícula de spin 1/2 na presença de um campo magnético constante, alinhado ao longo da direção do eixo z. O Hamiltoniano vale $\hat{H} = \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_z$, onde Ω é a frequência de Larmor, proporcional ao módulo do campo. Calcule o operador momento angular de spin na representação de Heisenberg $\hat{S}_{n_0}^{(H)}(t) = \vec{n}_0 \cdot \hat{\vec{S}}^{(H)}(t)$, onde $\vec{n}_0$ é o vetor unitário definido pelos ângulos em coordenadas esféricas (θ_0, ϕ_0), por um método à sua escolha. Mostre que $\hat{S}_{n_0}^{(H)}(t) = \hat{S}_{n(t)}^{(H)}(0)$ com $\vec{n}(t)$ definido pelos ângulos em coordenadas esféricas $(\theta_0, \phi_0 - \Omega t)$. Interprete o seu resultado e comente sobre o sentido de precessão de $\vec{n}(t)$, comparando-o com o sentido obtido para o vetor de estado na representação de Schrödinger.