Mecânica Quântica I – Pós-Graduação IF-UFRJ – Prof. Paulo A. Maia Neto

LISTA A - 2019-2

1. As matrizes de Pauli são definidas por:

$$\hat{\sigma}_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

e o operador vetorial

$$\hat{\vec{\sigma}} \equiv \hat{\sigma}_x \vec{i} + \hat{\sigma}_y \vec{j} + \hat{\sigma}_z \vec{k}.$$

(a) Calcule o comutador $[\hat{\vec{\sigma}}, \vec{a} \cdot \hat{\vec{\sigma}}]$, onde $\vec{a}$ é um vetor arbitrário.

(b) Determine os autovalores (espectro) de $\hat{\sigma}_n \equiv \vec{n} \cdot \hat{\vec{\sigma}}$, onde $\vec{n}$ é um vetor unitário real qualquer. Comente o seu resultado à luz da propriedade de isotropia espacial. Utilizando unicamente o resultado para o espectro de $\hat{\sigma}_n$, determine $\hat{\sigma}_n^2$. Justifique cuidadosamente.

(c) Calcule os autovetores de $\hat{\sigma}_n$ em termos dos ângulos em coordenadas esféricas que definem a direção do unitário $\vec{n}$: $\vec{n} = \mathrm{sen}\theta \, \cos\varphi \, \vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\theta \, \mathrm{sen}\varphi \, \vec{\mathrm{j}} + \cos\theta \, \vec{\mathrm{k}}$.

(d) Obtenha a matriz $[\hat{\sigma}_z]_{\mathcal{B}_x}$ que representa o operador $\hat{\sigma}_z$ na base de autovetores de $\hat{\sigma}_x$: $\mathcal{B}_x \equiv \{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$.

(e) Mostre que $(\vec{a} \cdot \hat{\vec{\sigma}})(\vec{b} \cdot \hat{\vec{\sigma}}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \, \hat{1} + i \, \vec{a} \times \vec{b} \cdot \hat{\vec{\sigma}}$.

2. Considere a exponencial de um operador linear $\hat{A}$:

$$e^{\hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{A}^n}{n!}$$

Como veremos mais adiante no curso, o operador

$$\hat{U} = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\vec{u} \cdot \hat{\vec{\sigma}}\right)$$

representa o operador rotação , de ângulo θ, em torno do eixo definido pelo vetor unitário $\vec{u}$.

(a) Usando os resultados da questão anterior, mostre que

$$\hat{U} = \cos(\theta/2) \, \hat{1} - i \, \mathrm{sen}(\theta/2) \, \hat{\sigma}_u \tag{1}$$

(b) Tome o vetor unitário

$$\vec{u} = (-\mathrm{sen}\phi, \cos\phi, 0). \tag{2}$$

Por meio de um desenho contendo os eixos cartesianos e as definições dos ângulos esféricos θ (em relação ao eixo z) e ϕ (ângulo de azimute no plano xy), mostre que a rotação em torno de $\vec{u}$ alinha o novo eixo z com a direção espacial associada aos ângulos esféricos θ e ϕ.

(c) Substituindo o exemplo dado pela (2) na equação (1), escreva a matriz de $\hat{U}$ na base de auto-estados de $\hat{\sigma}_z$. Determine o vetor coluna que representa $\hat{U}|+\rangle_z$. Compare seu resultado com a expressão obtida no item (c) da primeira questão.

3. Peres (ed. 1995), Cap. 3: 3.35, 3.38, 3.39

4. Sakurai (ed. 1994), Cap. 1: 12, 13, 15, 16, 23

5. **Mudança de base.** Mostre que a representação matrical de um operador linear $\hat{M}$ na base $\mathcal{B}'$, $[\hat{M}]_{\mathcal{B}'}$ pode ser obtida a partir da matrix $[\hat{M}]_{\mathcal{B}}$ que representa o mesmo operador em outra base $\mathcal{B}$ por meio da multiplicação matricial

$$[\hat{M}]_{\mathcal{B}'} = [\hat{U}^\dagger]_{\mathcal{B}} \cdot [\hat{M}]_{\mathcal{B}} \cdot [\hat{U}]_{\mathcal{B}}$$

onde U é o operador unitário que leva a base $\mathcal{B}$ na base $\mathcal{B}'$. Como aplicação do seu resultado,

(a) obtenha a matriz $[\hat{\sigma}_z]_{\mathcal{B}_x}$ que representa o operador $\hat{\sigma}_z$ na base de autovetores de $\hat{\sigma}_x$: $\mathcal{B}_x \equiv \{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$.

(b) Num espaço vetorial arbitrário, mostre que um operador diagonalizável completamente degenerado (todos os autovalores iguais) é representado pela mesma matriz em qualquer base ortonormal.