Mecânica Quântica I – Pós-Graduação IF-UFRJ – Prof. Paulo A. Maia Neto
PRIMEIRA LISTA DE PROBLEMAS - 2019-2

Prazo de entrega: 4/9/2019

1. (7.0) As matrizes de Pauli são definidas por:

$$\hat{\sigma}_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   e o operador vetorial

$$\hat{\vec{\sigma}} \equiv \hat{\sigma}_x \vec{i} + \hat{\sigma}_y \vec{j} + \hat{\sigma}_z \vec{k}.$$

   (a) Mostre que qualquer matriz 2×2 hermiteana pode ser escrita como

$$\hat{M} = \frac{1}{2}\{a\hat{1} + \vec{p} \cdot \hat{\vec{\sigma}}\}.$$

   Mostre que $a = \mathrm{tr}(\hat{M})$ e $p_i = \mathrm{tr}(\hat{M}\hat{\sigma}_i)$

   (b) Considere o spin do elétron. Usando o resultado do item anterior, mostre que o operador densidade para o estado de spin pode ser decomposto na forma

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\hat{1} + \vec{p} \cdot \hat{\vec{\sigma}}\right).$$

   Determine o vetor $\vec{p}$ em termos de valores esperados apropriados.

   (c) Mostre que a entropia linear do estado vale $S_{\mathrm{linear}} = 1 - \mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) = (1 - |\vec{p}|^2)/2$. Sugestão: utilize os resultados da primeira questão da lista A. À luz deste resultado, discuta o significado físico de $|\vec{p}|$.

   (d) Usando o resultado do item (a), mostre que o estado quântico pode ser caracterizado utilizando três medidas completas complementares, associadas a bases ortonormais sem tendência mútua. Observe que para cada cópia do sistema preparada sempre no mesmo estado, apenas uma das medidas é realizada. Forneça um exemplo de um tal conjunto de medidas. Discuta quais seriam os resultados encontrados para cada medida caso os elétrons sejam totalmente não polarizados.

2. (3.0) **Ambiguidade na preparação de ensemble quântico.** Para mostrar que existem um número ilimitado de preparações distintas de um estado mistura estatística, considere o seguinte exemplo de operador densidade para a polarização do foton:

$$\hat{\rho} = p\,|\mathrm{H}\rangle\langle\mathrm{H}| + (1-p)\,|\mathrm{V}\rangle\langle\mathrm{V}| \tag{1}$$

   onde $|\mathrm{H}\rangle$ e $|\mathrm{V}\rangle$ representam estados puros de polarização linear horizontal e vertical, respectivamente. A probabilidade p está no intervalo

$$1/2 \leq p \leq 1.$$

(a) Mostre que $\hat{\rho}$ pode ser escrito na forma

$$\hat{\rho} = (2p - 1) \left|\mathrm{H}\right\rangle\left\langle\mathrm{H}\right| + (1 - p)\, \hat{\mathbf{1}}$$

onde $\hat{\mathbf{1}}$ é o operador identidade.

(b) Usando a equação acima, mostre que existem infinitas preparações distintas do estado $\hat{\rho}$, exceto para um único valor de p. Comente sobre esta exceção separadamente.