Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Física

MECÂNICA QUÂNTICA II – 2003.2

1ª PROVA - 02/10/2003 - Duração: 2:00 horas

1. Um electron (carga $-e$, massa m) se encontra inicialmente no estado de spin

$$|\chi\rangle_{t=0} = |-\rangle_z.$$

Esse sistema evolui sob a ação de um campo magnético uniforme paralelo ao eixo Ox : $\vec{B} = B\vec{i}$.

(a) Mostre que o Hamiltoniano do sistema é da forma

$$\hat{H} = \frac{\hbar\Omega}{2}\,\hat{\sigma}_x$$

com $\Omega = \frac{eB}{mc}$. Determine a dimensão física da constante Ω, em termos unicamente das dimensões fundamentais tempo, massa e comprimento.

(b) Calcule o estado do sistema num tempo t genérico (representação na base de auto-estados de $\hat{S}_z$).

(c) Calcule o valor esperado de $\hat{S}_x$ no tempo t e interprete o resultado em termos da precessão de Larmor.

(d) Ao medir $\hat{S}_z$ no tempo t, quais são os resultados possíveis, e respectivas probabilidades? Discuta em detalhe os resultados para $t = 0$ e para $t = \pi/\Omega$.

2. Uma partícula de massa M se move num círculo de raio a centrado na origem no plano xy. O estado da partícula é representado pela função de onda $\psi(\theta)$ onde θ é o ângulo em relação ao eixo Ox. $\psi(\theta)$ é periódica de período 2π,

$$\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta).$$

O Hamiltoniano não perturbado é dado pelo operador diferencial

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2M\,a^2}\,\partial_\theta^2.$$

(a) Mostre que as auto-funções de H_0 são da forma

$$\psi(\theta) = C_n\,e^{in\theta},$$

e determine os auto-valores correspondentes.

(b) Calcule a constante de normalização C_n e determine os valores permitidos para o parâmetro n.

(c) Discute quais níveis de energia são degenerados, e os graus de degenerescência.

(d) Suponha que a partícula tenha carga q, e um campo elétrico $\mathbf{E} = E\,\vec{j}$ é aplicado ao longo da direção Oy. Mostre que o Hamiltoniano que descreve o acoplamento com o campo aplicado é

$$W \;=\; -q\,E\,a\,\sin\theta.$$

(e) Calcule a correção da energia do estado fundamental até segunda ordem em teoria de perturbação (calcule também o termo de primeira ordem). Deduza a partir do seu resultado a polarizabilidade α do estado fundamental.

(f) Qual é a condiçao sobre o módulo do campo elétrico E para a validade do método perturbativo?

(g) Calcule a correção da energia dos estados excitados até primeira ordem em teoria de perturbação. Compare o resultado com o efeito Stark linear do átomo de Hidrogênio, e explique a razão física para a diferença entre os dois problemas.

Teoria de perturbação – caso não degenerado:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{W}$$

$$E_n(\lambda) = E_n^0 + \lambda\langle\phi_n|W|\phi_n\rangle + \lambda^2 \sum_{k\neq n}\sum_{p=1}^{g_k} \frac{|\langle\phi_k^p|W|\phi_n\rangle|^2}{E_n - E_k} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

Matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Universidade Federal do Rio de Janeiro — Instituto de Física

MECÂNICA QUÂNTICA II – 2006.1

P1 -02/05/2006 - Duração: 2:00 horas

1. [5.0] **Efeito Stark para o estado fundamental do átomo de Hidrogênio**. Considere o átomo de Hidrogênio ($-e$ e m representam a carga e a massa reduzida do elétron e a_0 é o raio de Bohr) na presença de um campo elétrico uniforme estático de módulo E aplicado na direção do eixo Oz.

(a) Calcule a correção da energia do estado fundamental em primeira ordem de teoria de perturbação.

(b) A correção da energia do estado fundamental em segunda ordem de teoria de perturbação vale

$$\delta\mathcal{E}^{(2)} = -e^2 E^2 \mathcal{S}$$

onde a soma

$$\mathcal{S} = \sum_j \frac{|\langle j|Z|0\rangle|^2}{\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_0}$$

é sobre todos os estados estacionários excitados do Hamiltoniano não perturbado H_0 (o estado fundamental $|0\rangle$ é excluído da soma).

Para calcular $\mathcal{S}$, utilize o operador F dado por (na representação de posição em coordenadas esféricas)

$$F = -\frac{ma_0}{\hbar^2}\left(\frac{r}{2} + a_0\right) r\cos\theta.$$

Use (sem demonstrar) que este operador satisfaz a equação

$$Z|0\rangle = [F, H_0]|0\rangle$$

Use ainda, também sem demonstrar, os seguintes resultados para valores médios no estado fundamental: $\langle r^2\rangle = 3a_0^2$ e $\langle r^3\rangle = 30a_0^3/4$.

(c) A partir do seu resultado para o item (b), determine a polarizabilidade do estado fundamental do átomo de Hidrogênio.

(d) Qual é a condição sobre o módulo do campo E para a validade do método de perturbação? Forneça uma interpretação física para esta condição.

2. [5.0] O estado de uma partícula de spin 1/2 é representado pelo spinor de Pauli (omitindo a parte radial)

$$[\psi](\theta, \phi) = N \begin{pmatrix} \sqrt{2} Y_{10}(\theta) \\ Y_{11}(\theta, \phi) \end{pmatrix} .$$

(a) Determine o valor da constante N para que $[\psi]$ tenha norma unitária.

(b) Responda se $[\psi]$ é auto-estado de cada um dos operadores listados a seguir (justifique!). Em cada caso afirmativo, determine o auto-valor correspondente. Operadores: L^2, S^2, L_z, S_z e $J_z = L_z + S_z$.

(c) A partícula se encontrando no estado $[\psi]$, mede-se L_z e encontra-se o valor nulo. Imediatamente em seguida, mede-se S_z. Quais são as probabilidades para encontrar os diferentes valores possíveis nesta segunda medida? Quais seriam as probabilidades para S_z se este observável fosse medido primeiro? Interprete os seus resultados em termos do momento angular total.

(d) Calcule o spinor $[\phi] = \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}[\psi]$. $[\psi]$ é auto-estado de J^2 ? Justifique, e determine o auto-valor se a resposta for positiva.

Matrizes de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Operadores abaixamento/levantamento

$$L_- Y_{\ell m} = \hbar \sqrt{(\ell + m)(\ell - m + 1)} Y_{\ell m-1}$$

$$L_+ Y_{\ell m-1} = \hbar \sqrt{(\ell + m)(\ell - m + 1)} Y_{\ell m}$$