Mecânica Quântica 2 –2018-1 – IF-UFRJ – P1 – 15/05/2018
Escolha as questões pares ou as ímpares: 1+3+5 ou 2+4. Não é permitido combinar pares e ímpares. Duração : 2 horas

1. (0.5) Considere uma partícula de spin 1/2. Escreva o spinor de Pauli normalizado $[\psi](\theta,\phi)$ de duas componentes (dependência angular) que representa o vetor $|\ell=0, j=1/2, m=-1/2\rangle$ auto-estado simultâneo de L^2, J^2 e S_z.

2. (3.5) Considere o estado fundamental do hidrogênio. A função de onda é da forma $\psi(r,\theta,\phi) = C\exp(-r/a_0)$, onde $a_0 = \hbar^2/(me^2)$ é o raio de Bohr.

   (a) Determine um valor para a constante C para que o estado tenha norma unitária.

   (b) Considere o termo de Darwin

   $$W_{\text{Darwin}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 e^2\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}).$$

   Determine a correção $\mathcal{E}^{(1)}$ devida a W_{Darwin} em primeira ordem de teoria de perturbação para o nível fundamental do átomo de hidrogênio. Escreva também a correção relativa $\mathcal{E}^{(1)}/\mathcal{E}^{(0)}$, onde $\mathcal{E}^{(0)}$ é a energia não perturbada, em termos da constante de estrutura fina α.

3. (5.0) O estado de uma partícula de spin 1/2 é representado pelo spinor de Pauli de norma unitária (omitindo a parte radial)

   $$[\psi](\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}Y_{1-1}(\theta,\phi) + Y_{10}(\theta) \\ -\frac{1}{2}Y_{10}(\theta) + \frac{i}{\sqrt{2}}Y_{11}(\theta,\phi)\end{pmatrix}.$$

   onde $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ representam os harmônicos esféricos.

   (a) Responda se $[\psi]$ é auto-estado de cada um dos operadores listados a seguir. Em cada caso afirmativo, determine o auto-valor correspondente. Justifique cada resposta, mas não é necessário nenhum cálculo! Operadores: L^2, S^2, L_z, S_z e $J_z = L_z + S_z$.

   (b) A partícula encontra-se no estado $[\psi]$ escrito acima, e mede-se então S_x. Determine os resultados possíveis para esta medida e as respectivas probabilidades.

   (c) Numa medida de L_z, a partícula estando no estado $|\psi\rangle$, o resultado obtido foi nulo. Que estado descreve a partícula após essa medida? Ao medir S_x em seguida, quais são os resultados possíveis e respectivas probabilidades? Compare com o resultado do item (b) e comente.

4. (6.5) Considere uma partícula de massa m em uma dimensão espacial na presença do potencial

   $$V(x) = \infty, \;\; x \le 0; \;\; V(x) = m\omega^2 x^2/2, \;\; x > 0. \qquad (1)$$

   Para calcular a energia do estado fundamental por meio do método variacional, tome a família de funções de onda da forma

   $$\psi_\alpha(x) = x\,\exp(-\alpha x^2) \qquad (2)$$

   com α real positivo.

(a) Discuta as propriedades desta família de funções de onda que a qualificam para o cálculo variacional aplicado ao potencial $V(x)$ dado pela eq. (1). Por que não devemos tomar a família $\phi_\alpha(x) = \exp(-\alpha x^2)$ neste exemplo ?

(b) Calcule os valores esperados para a energia cinética e para a energia potencial quando o estado quântico da partícula corresponde à função de onda $\psi_\alpha(x)$ dada pela eq. (2). Estes valores esperados crescem ou descrescem com o parâmetro α (uma resposta para cada) ? Explique estas propriedades de forma qualitativa, à luz do princípio de incerteza e tendo em vista as propriedades da função de onda $\psi_\alpha(x)$.

(c) Esboce o gráfico do valor esperado da energia em função do parâmetro α.

(d) Determine a energia do estado fundamental por meio do método variacional. Compare com o resultado exato.

5. (4.5) Considere uma partícula de massa m no poço de potencial ($\alpha > 0$)

$$V(x) = \alpha |x|.$$

(a) No problema clássico, a partícula descreve uma trajetória periódica com pontos de retorno em $x = -a$ e em $x = a$. Determine a energia da partícula como função de a. Determine o momento clássico da parícula $p(x)$ quando ela se encontra numa dada posição x.

(b) Vamos tratar o problema quântico pelo método WKB. Determine o espectro de energia partindo da equação (Bohr-Sommerfeld)

$$\int_{-a}^{a} p(x)\, dx = \pi\hbar(n + 1/2),$$

onde n é um inteiro não negativo.

(c) O espaçamento entre os níveis consecutivos cresce, decresce ou permanece constante em função do número quântico n para $n \gg 1$? Compare com os exemplos de potencial harmônico e de poço de barreiras impenetráveis (caixa quântica) e discuta as diferenças.

FÓRMULAS ÚTEIS

$$\int_0^\infty dx\, x^n \exp(-x) = n! \ , \quad n = 0, 1, 2, 3...$$

$$\int_0^\infty dx\, x^2\, \exp(-2\alpha x^2) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha^3}}$$

$$\int_0^\infty dx\, x^4\, \exp(-2\alpha x^2) = \frac{3}{32}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha^5}}$$

$$\int_0^1 dx\, \sqrt{1-x} = \frac{2}{3}$$

Matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$