Instituto de Física — UFRJ
Mecânica Quântica 2 – 2018-1 – Prof. Paulo A. Maia Neto
Lista 4

1. Um sistema consiste de duas partículas de spin 1/2, com momentos de dipolo magnético idênticos e iguais a $\alpha\vec{S}_i$. A interação spin-spin entre as duas partículas é $J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2/\hbar$, onde J é uma constante. Um campo magnético externo é aplicado ao sistema, de modo que o Hamiltoniano de sistema é dado por (escolhendo $\vec{B} \parallel \vec{z}$):

$$H = \frac{J}{\hbar}\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \alpha B(S_{1z} + S_{2z})\,.$$

   (a) Suponha que $\alpha B \ll J$. Usando teoria das perturbações , com $H_0 = J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2/\hbar$, calcule os autovalores de H até primeira ordem em $\alpha B/J$ e os autoestados correspondentes em ordem zero.

   (b) Suponha agora que $\alpha B \gg J$, e tome $H_0 = \alpha B(S_{1z} + S_{2z})$. Calcule os autovalores de H até primeira ordem em $J/\alpha B$ e os autoestados correspondentes em ordem zero.

   (c) Resolva o problema exatamente, calculando os autovalores e autoestados de H. Verifique que os resultados obtidos anteriormente são encontrados nos limites apropriados.

2. Considere uma partícula de massa m colocada em um poço de potencial bi-dimensional infinito de largura a:

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le a \text{ e } 0 \le y \le a, \\ +\infty & \text{nas outras regiões.} \end{cases}$$

   Essa partícula é submetida a uma perturbação W descrita pelo potencial

$$W(x,y) = \begin{cases} w_0 & \text{se } 0 \le x \le a/2 \text{ e } 0 \le y \le a/2, \\ 0 & \text{nas outras regiões.} \end{cases}$$

   (a) Calcule os autovalores e as autofunções normalizadas para o Hamiltoniano $H = p^2/2m + V(x,y)$.

   (b) Calcule, em primeira ordem em w_0, a energia perturbada do estado fundamental.

   (c) Mesma questão para o primeiro estado excitado (note que o primeiro nível excitado é degenerado). Escreva as funções de onda correspondentes em ordem zero em w_0.

3. **Efeito Stark para uma partícula num anel de raio** r. Uma partícula de massa m se move num círculo de raio r centrado na origem no plano xy. O estado da partícula pode ser representado pela função de onda

$$\psi(\theta) = \langle\theta|\psi\rangle,$$

   onde θ representa o ângulo em relação ao eixo Ox. $\psi(\theta)$ é periódica de período 2π,

$$\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$$

e é normalizada pela integral

$$\int_0^{2\pi} d\theta \, |\psi(\theta)|^2 \; = \; 1.$$

O Hamiltoniano não perturbado corresponde à energia cinética da partícula:

$$H_0 = \frac{{L_z}^2}{2mr^2}$$

onde L_z é o operador componente z do momento angular da partícula:

$$\langle\theta|L_z|\psi\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(\theta).$$

a) Determine as auto-funções (normalizadas) e auto-valores de H_0. Discute quais níveis de energia são degenerados, e os graus de degenerescência.

b) Suponha que a partícula tenha carga q, e uma campo elétrico $\mathbf{E} = E\,\vec{i}$ é aplicado ao longo da direção Ox. Mostre que o Hamiltoniano que descreve o acoplamento com o campo aplicado é

$$W = -q\,E\,X,$$

que na representação de posição angular se escreve

$$W \; = \; -q\,E\,r\;\cos\theta.$$

c) Calcule a correção da energia do estado fundamental até segunda em teoria de perturbação (calcule também o termo de primeira ordem). Deduza a partir do seu resultado a polarizabilidade α do estado fundamental.

d) Qual é a condiçao sobre o módulo do campo elétrico E para a validade do método perturbativo?

e) Calcule a funçao de onda perturbada (até primeira ordem) do estado fundamental. Esboce o gráfico de $\psi(\theta)$ versus θ e discuta como a densidade de probabilidade $|\psi(\theta)|^2$ varia ao longo do anel de raio r supondo $q > 0$.

f) Usando o resultado do item anterior, calcule o valor esperado do *vetor* momento de dipolo elétrico induzido pelo campo aplicado, e compare com o resultado para a polarizabilidade obtido no item c.

4. **Efeito Stark para o estado fundamental do átomo de Hidrogênio** (efeito Stark quadrático).

   A correção da energia do estado fundamental em segunda ordem de teoria de perturbação devido à interação com um campo elétrico uniforme estático de módulo E vale

$$\mathcal{E}^{(2)} = -e^2E^2\mathcal{S}$$

   onde a soma

$$\mathcal{S} = \sum_j \frac{|\langle j|Z|n=1\rangle|^2}{\mathcal{E}_j - \mathcal{E}_1}$$

é sobre todos os estados estacionários excitados do Hamiltoniano não perturbado H_0 (o estado fundamental não-perturbado $|n=1\rangle$ é excluído da soma).

Para calcular $\mathcal{S}$ no caso do átomo de Hidrogênio, resolva os itens a seguir, usando a função de onda do estado fundamental $\psi_{100}(\mathbf{r}) = e^{-r/a_0}/\sqrt{\pi a_0^3}$, onde $a_0 = \hbar^2/me^2$ é o raio de Bohr.

a) Mostre que o operador F dado por (na representação de posição em coordenadas esféricas)

$$F = -\frac{ma_0}{\hbar^2}\left(\frac{r}{2} + a_0\right) r\cos\theta$$

satisfaz a equação

$$Z|n=1\rangle = [F, H_0]|n=1\rangle$$

Usando esta equação e a relação de completeza para os auto-estados de H_0, mostre que

$$\mathcal{S} = -\langle ZF\rangle + \langle Z\rangle\langle F\rangle,$$

onde a média é tomada sobre o estado fundamental não-perturbado $|n=1\rangle$.

b) Calcule $\mathcal{S}$ a partir destes resultados. Determine, a partir do seu resultado, a polarizabilidade estática do estado fundamental do hidrogênio. Determine a correção de energia relativa $\mathcal{E}^{(2)}/\mathcal{E}^{(0)}$ ($\mathcal{E}^{(0)} = -e^2/(2a_0)$ é a energia não-perturbada do estado fundamental) e discuta a condição para que ela seja pequena.