1

MQ1 - 2018-2 - P2 - Gabarito

1) $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ (*)

(a) Não é estacionário, porque é combinação linear de auto-estados de H com auto-valores distintos. Portanto não é auto-estado de H.

(b) $$a|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}\, |n-1\rangle = \alpha e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle$$

mudando o índice de soma $n \to n' = n-1$, temos

$$a|\alpha\rangle = \alpha e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n'}}{\sqrt{n'!}} |n'\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$ como queríamos mostrar

(c) $|\Psi\rangle_0 = |\alpha\rangle \Rightarrow$

$$|\Psi\rangle_t = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{e^{-iE_n t/\hbar}}_{e^{-i(n+1/2)\omega t}} |n\rangle \quad \text{com } E_n = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

logo

$$|\Psi\rangle_t = e^{-i\omega t/2} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

definindo $\alpha_t = \alpha e^{-i\omega t}$, temos $|\alpha_t| = |\alpha|$, e o vetor de estado se escreve

$$|\Psi\rangle_t = e^{-i\omega t/2} e^{-|\alpha_t|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_t^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Comparando com a eq. (*), concluímos que, exceto por fase global $e^{-i\omega t/2}$, $|\Psi\rangle_t$ é da forma (*) com $\alpha \to \alpha_t = e^{-i\omega t}\alpha$

Assim, $|\psi\rangle_t$ é um estado coerente de amplitude complexa $\alpha e^{-i\omega t}$

d) Note que

$$a = \frac{\tilde{X} + i\tilde{P}}{\sqrt{2}}, \quad \text{com } \tilde{X} = \frac{X}{x_0}$$

$$\tilde{P} = Px_0/\hbar$$

$$a^+ = \frac{\tilde{X} - i\tilde{P}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a + a^+ = \sqrt{2}\,\tilde{X} \Rightarrow \tilde{X} = \frac{a+a^+}{\sqrt{2}}$$

Vamos calcular o valor médio $\langle \tilde{X} \rangle$:

$$\langle \tilde{x} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} {}_t\langle \psi | a | \psi \rangle_t + \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{{}_t\langle \psi | a^+ | \psi \rangle_t}_{= {}_t\langle \psi | a | \psi \rangle_t^*}$$

$$\Rightarrow \langle \tilde{x} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} {}_t\langle \psi | a | \psi \rangle_t + \text{complexo conjugado}$$

Vamos usar que $|\psi\rangle_t$ é um estado coerente, com amplitude $\alpha_t = \alpha e^{-i\omega t}$. Logo, é auto-vetor de a com auto-valor α_t:

$$a|\psi\rangle_t = \alpha_t |\psi\rangle_t \Rightarrow$$

$$\langle \tilde{x} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_t + \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_t^* = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \operatorname{Re} \alpha_t$$

$$\langle \tilde{x} \rangle = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left(|\alpha| e^{i\delta} e^{-i\omega t} \right) = \sqrt{2} |\alpha| \cos(\omega t - \delta)$$

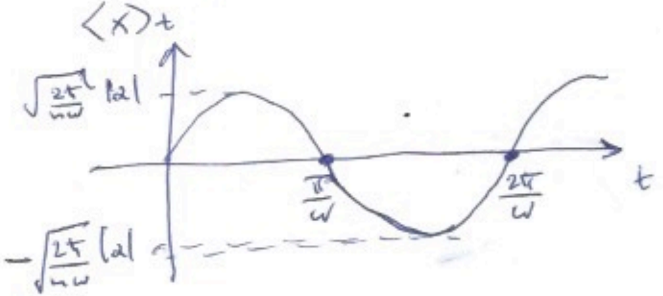
$$\langle x \rangle = x_0 \langle \tilde{x} \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sqrt{2} |\alpha| \cos(\omega t - \delta)$$

Oscilação harmônica, com freq. angular ω, amplitude $= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |\alpha|$, e constante de fase $-\delta$

Portanto, $|\alpha|$ determina a amplitude do movimento oscilatório, ao passo que δ determina a posição/vel. no instante $t=0$.

ex: $\delta = \pi/2 \Rightarrow \langle x \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |\alpha| \operatorname{sen}(\omega t)$

Esboço de $\langle X \rangle_t$:



e) teo Ehrenfest $\Rightarrow$ $\langle P \rangle_t = m\, d_t \langle X \rangle$

$$\langle P \rangle_t = -\sqrt{2m\hbar\omega}\,|\alpha|\,\text{sen}(\omega t - \delta)$$

2a Questao)

1) $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} \Rightarrow$

note que $[X_k, P_{k'}] = i\hbar\,\delta_{kk'}\mathbb{1}$

a) $L_x = YP_z - ZP_y$

$L_y = ZP_x - XP_z$

$$[L_x, L_y] = [YP_z - ZP_y, ZP_x - XP_z]$$

$$= [YP_z, ZP_x] + [ZP_y, XP_z]$$

$$= Y\underbrace{[P_z, Z]}_{-i\hbar\mathbb{1}}P_x + X\underbrace{[Z, P_z]}_{i\hbar\mathbb{1}}P_y$$

$$= (XP_y - YP_x)i\hbar = i\hbar L_z$$

b) Por simetria, podemos escrever tb

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x$$

$$[L_x, L_z] = -i\hbar L_y$$

c) Sim, embora não exista uma base de autovetores simultâneos, o vetor $|0,0\rangle$ é auto-vetor simultâneo de L_x, L_y e L_z, com auto-valores nulos.

De fato, na representação de posição temos

$\langle\theta,\phi|0,0\rangle = Y_{00} = C^{te} \Rightarrow L_x Y_{00} = L_y Y_{00} = 0$ já que L_x e L_y são operadores diferenciais.

) As relações de comutação dos itens a e b $\Rightarrow$ relações de incerteza

$$\Delta L_x \cdot \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{2} \langle L_z \rangle \qquad (1)$$

$$\Delta L_y \cdot \Delta L_z \geq \frac{\hbar}{2} \langle L_x \rangle \qquad (2)$$

$$\Delta L_x \cdot \Delta L_z \geq \frac{\hbar}{2} \langle L_y \rangle \qquad (3)$$

Assim se $|\psi\rangle$ é auto-estado de L_x

$\Rightarrow \Delta L_x = 0 \Rightarrow \langle L_z \rangle = 0$ (eq 1)

e $\langle L_y \rangle = 0$ (eq 3)

Analogamente, se $|\varphi\rangle$ é auto-estado de L_y,

então $\Delta L_y = 0$ e eq (1) $\Rightarrow \langle L_z \rangle = 0$, eq (2) $\Rightarrow \langle L_x \rangle = 0$.

O mesmo vale p/ os estados $|l, m\rangle$ auto-estados de L_z.

3) Barreira em $r = a$ (caixa esférica raio a)

$l = 0 \Rightarrow$ barreira centrífuga $\equiv 0$

De fato, neste caso $\Psi(r,\theta,\phi) = \Psi(r)$ e a eq. de Schrodinger $-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi = \mathcal{E}\Psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2M}u''(r) = \mathcal{E}u(r)$ com

$k^2 = \frac{2M\mathcal{E}}{\hbar^2}$, $\quad \Rightarrow u'' = -k^2 u$

$u(r) = r \cdot R(r)$ satisfazendo as condições de contorno

$$\left.\begin{array}{l} u(0) = 0 \\ u(a) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_n(r) = C_0 \operatorname{sen} k_n r, \text{ com } k_n a = n\pi, \ n \in \mathbb{Z}^+$$

$$k_n = n\pi/a$$

Níveis de energia: $\mathcal{E}_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2M} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2Ma^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

(5)

Auto funções:

$$\Psi_n(r,\theta,\phi) = \begin{cases} \frac{C_0}{r}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi r}{a}\right), & 0 \leq r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Constante de normalização C_0:

$$\int d^3r\, |\Psi_n(\vec{r})|^2 = 1 \Rightarrow 4\pi \int_0^a dr\, \cancel{r^2} \frac{C_0^2}{\cancel{r^2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi r}{a}\right) = 1$$

$$s = r/a \Rightarrow dr = a\, ds \Rightarrow$$

$$4\pi C_0^2 a \underbrace{\int_0^1 ds\, \operatorname{sen}^2(n\pi s)}_{1/2} = 2\pi a C_0^2 = 1 \Rightarrow$$

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \Rightarrow \Psi_n(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi r}{a}\right)}{r}, & 0 \leq r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Probabilidade de obter valor p/ r no intervalo $0 \leq r \leq a/2$:

$$P = \int_{r < \frac{a}{2}} d^3r\, |\Psi_n(r)|^2 = \frac{4\pi}{2\pi a} \int_0^{a/2} dr\, \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi r}{a}\right) = 2\underbrace{\int_0^{1/2} ds\, \operatorname{sen}^2(n\pi s)}_{= 1/4}$$

$P = 1/2$ p/ todos os estados estacionários c/ $\ell = 0$.