Mecânica Quântica I –2018-2 – IF-UFRJ
P2 – 27/11/2018
Instruções : Escolha 1+2 ou 1+3. Nenhuma outra combinação é permitida. A questão 1 é obrigatória. Duração: 2:30

1. (total = 6.0)

   Considere uma partícula de massa m num poço de potencial harmônico em 1D, de frequência angular ω. No tempo $t = 0$ ela se encontra no estado coerente de amplitude complexa α

   $$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

   onde $|n\rangle$ são os autoestados de energia.

   (a) (0.8) O estado $|\alpha\rangle$ é estacionário? Justifique.

   (b) (0.7) Mostre que $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ onde a é o operador de aniquilação .

   (c) (1.5) Calcule o estado da partícula em um tempo $t > 0$ e mostre que ele continua sendo um estado coerente para todo tempo t.

   (d) (2.5) Calcule o valor médio da posição X da partícula no tempo t. Escreva o seu resultado em termos do módulo $|\alpha|$ e da fase δ da amplitude complexa: $\alpha = |\alpha|\, e^{i\delta}$. Descreva as propriedades físicas relevantes da sua expressão para a função $\langle X \rangle_t$. Discuta o significado físico dos parâmetros $|\alpha|$ e δ tendo em vista o seu resultado para $\langle X \rangle_t$. Esboce o gráfico de $\langle X \rangle_t$ para $\delta = \pi/2$. Apresente no seu gráfico todos os parâmetros relevantes do movimento.

   (e) (0.5) Usando o teorema de Ehrenfest e o resultado do item anterior, determine o valor médio do momento no tempo t, $\langle P \rangle_t$.

2. (total = 4.0) Sejam L_x,L_y, e L_z, os operadores de momento angular orbital e $|\ell, m\rangle$ um auto-estado simultâneo de $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ e L_z com autovalores $\ell(\ell+1)\hbar^2$ e $m\hbar$, respectivamente.

   (a) (0.5) Calcule o comutador $[L_x, L_y]$ a partir dos comutadores de posição e momento.

   (b) (0.5) Escreva (não é preciso calcular) os resultados dos comutadores $[L_x, L_z]$ e $[L_y, L_z]$.

   (c) (1.0) Existe algum auto-vetor simultâneo de L_x, L_y e L_z? Caso afirmativo, apresente um exemplo de auto-vetor simultâneo (em termos dos $|\ell, m\rangle$) e os auto-valores correspondentes; caso negativo justifique.

   (d) (2.0) Mostre que se a partícula se encontra em um auto-estado de um dos três operadores L_x,L_y, ou L_z, os valores esperados dos outros dois operadores são nulos.

3. (4.0)

   (a) Obtenha os níveis de energia e as funções de onda estacionárias para uma partícula de massa M no interior de uma cavidade esférica de parede impenetrável de raio a, para estados com $\ell = 0$.

   (b) Para cada um dos estados estacionários com $\ell = 0$ (onda s) encontrados no item anterior, determine a probabilidade de encontrar a partícula a uma distância da origem menor do que $a/2$.

FÓRMULAS ÚTEIS

Níveis de energia para oscilador harmônico de frequência ω : $\hbar\omega/2, 3\hbar\omega/2, 5\hbar\omega/2, ...$

Operador aniquilação :

$$a = (X/x_0 + iPx_0/\hbar)/\sqrt{2},\ x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle; \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

Momento angular orbital

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P},$$

Laplaciano em coordenadas esféricas

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}$$

Integrais úteis

$$\text{se } n \in Z^+, \int_0^{1/2} dx\ \sin^2(n\pi x) = 1/4$$

$$\text{se } n \in Z^+, \int_0^{1} dx\ \sin^2(n\pi x) = 1/2$$