Instituto de Física-UFRJ

MECÂNICA QUÂNTICA I – 2004-1

$1^{\underline{a}}$ PROVA - Duração: 2 horas

1. [2.5] Considere uma partícula de massa m no potencial harmônico uni-dimensional $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Os estados estacionários são representados por $|n\rangle$, com $n = 0, 1, 2, ...$

a) O operador abaixamento atua sobre os estados estacionários da seguinte forma: $a|n\rangle = C|n-1\rangle$. $|n\rangle$ é um auto-estado de a ? Caso negativo justifique, caso afirmativo determine o autovalor. Determine a constante de normalização C.

b) Calcule o valor médio da energia potencial quando a partícula se encontra no estado estacionário $|n\rangle$. Sugestão: use o resultado $X = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}\,(a + a^\dagger)$.

c) A partir do resultado do item (b), determine o valor médio da energia cinética quando a partícula se encontra no estado estacionário $|n\rangle$.

2. [4.5] Considere um elétron (carga $-q$, massa m) no campo Coulombiano de um núcleo de massa M e carga Zq, onde Z é o número atômico. O potencial de interação é

$$V(r) = -\frac{Z\,q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \equiv -\frac{Ze^2}{r}.$$

Considere a função de onda do elétron

$$\psi(r) = \exp(-r/a).$$

a) Determine a condição sobre a constante a para que ψ corresponda a um estado estacionário.

b) Uma vez satisfeita a condição do item a), determine o valor de energia associado ao estado ψ.

c) Obtenha a partir do resultado do item a) a expressão para o raio de Bohr a_0, que é a escala de comprimento relevante para o problema do átomo de hidrogênio.

d) Em qual das duas situações a distância média entre o núcleo e o elétron é maior: $Z \gg 1$ ou $Z = 1$? Justifique cuidadosamente (não é cobrado o cálculo do valor médio).

e) Estando o elétron no estado ψ, é feita uma medida dos observáveis L^2 e L_z. Determine os resultados possíveis e respectivas probabilidades.

3. [3.0] Sejam L_x,L_y, e L_z, operadores de momento angular e $|\ell, m\rangle$ um auto estado simultâneo de L^2 e L_z com autovalores $\ell(\ell+1)\hbar^2$ e $m\hbar$. Os operadores abaixamento e levantamento são definidos por $L_+ = L_x + iL_y$ e $L_- = L_x - iL_y$.

a) O vetor de estado $|0, 0\rangle$ é autoestado de L_x ? Caso negativo, justifique, caso afirmativo determine o auto-valor.

b) É possível construir uma base de auto-vetores simultâneos de L^2, L_x e L_z ? Justifique e comente a sua resposta à luz do item (a).

c) Calcule um autovetor simultâneo de L^2 e L_x que tenha autovalores $2\hbar^2$ e 0, respectivamente, em função dos autovetores $|\ell, m\rangle$.

****

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}$$

$$L_+|\ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}\,|\ell, m+1\rangle$$

$$L_-|\ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\,|\ell, m-1\rangle$$