Mecânica Quântica I –2017-2 – IF-UFRJ
P2 – 14/11/2017
Instruções : Escolha a questão 2 ou a questão 3. Não é permitido resolver itens das questões 2 e 3 simultaneamente. A questão 1 é obrigatória. Duração : 2.5 horas

1. (4.5 pontos) Considere uma partícula de massa m num poço de potencial harmônico em 1D, de frequência angular ω. Calcule os valores médios e incertezas de X e P para o estado fundamental $|0\rangle$. Discuta o seu resultado à luz do princípio de incerteza. Obtenha o valor da energia do estado fundamental (energia de ponto zero) a partir dos seus resultados para ΔX e ΔP.

2. Considere um elétron (carga $-e$, massa m) no campo Coulombiano do próton (massa M_p). Os estados de norma unitária $|n\,\ell\,m\rangle$ são auto-vetores simultâneos de H, L^2, e L_z. n é o número quântico principal, enquanto ℓ e m são os números quânticos associados a L^2 e L_z.

   (a) (2.5) O estado $\frac{1}{2}|210\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|211\rangle$ é estacionário? E o estado $(|210\rangle + i|321\rangle)/\sqrt{2}$? Justifique. Para o(s) caso(s) em que a resposta é negativa, obtenha a evolução temporal e determine os instantes de tempo em que o estado fica ortogonal ao estado inicial.

   (b) (1.0) Suponha neste item que o estado do elétron é $(|210\rangle + i|321\rangle)/\sqrt{2}$. Preencha uma tabela como mostrado abaixo, contendo os resultados possíveis e respectivas probabilidades para uma medida simultânea de de H, L^2, e L_z.

valor para H	valor para L^2	valor para L_z	probabilidade
...	...	...	...
...	...	...	...
...			

   (c) (2.0) Suponha neste item que o estado do elétron é $\frac{1}{2}|210\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|211\rangle$. Determine o valor esperado do observável L_x.

3. Considere um elétron (carga $-e$, massa M_e) no campo Coulombiano de um núcleo de massa $M \gg M_e$ e carga Ze, onde Z é o número atômico. O potencial de interação é

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}.$$

   Considere a função de onda do elétron

$$\psi(r) = \exp(-r/a).$$

   (a) (2.5) Determine a condição sobre a constante a para que ψ corresponda a um estado estacionário.

   (b) (1.0) Uma vez satisfeita a condição do item anterior, determine a energia $\mathcal{E}$ do estado estacionário. Use (sem demonstrar) o resultado do teorema do virial $\langle V\rangle = 2\mathcal{E}$ para escrever o valor esperado $\langle V\rangle$ na forma padrão da lei de Coulomb: $\langle V\rangle = Q_1Q_2/\text{distancia}$. Discuta o significado do seu resultado e estime a distância característica entre o núcleo e o elétron.

(c) (1.0) Em qual das duas situações a distância média entre o núcleo e o elétron é maior: $Z \gg 1$ ou $Z = 1$? Justifique cuidadosamente (não é cobrado o cálculo do valor médio da distância).

(d) (1.0) Estando o elétron no estado ψ, é feita uma medida dos observáveis L^2 e L_x. Determine os resultados possíveis e respectivas probabilidades.

FÓRMULAS ÚTEIS

Operador abaixamento $a = (X/x_0 + iPx_0/\hbar)/\sqrt{2}$, $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle; \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$L_\pm = L_x \pm iL_y$$

$$L_+|\ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)}\,|\ell, m+1\rangle$$

$$L_-|\ell, m\rangle = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)}\,|\ell, m-1\rangle$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}$$

Autovalores de energia para o átomo de Hidrogênio: $\mathcal{E}_n = -\mathcal{R}/n^2$, com $\mathcal{R} = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2}$, massa reduzida $\mu = \frac{M_e M_p}{M_e + M_p}$