Instituto de Física — UFRJ
Mecânica Quântica 2 – 2018-1 – Prof. Paulo A. Maia Neto
Lista 8

1. Duas partículas de massa m atraem-se mutuamente através de um potencial harmônico unidimensional $V(x) = (1/2)kx^2 = (1/2)k(x_1 - x_2)^2$. Quais são as energias possíveis para o sistema no referencial do centro-de-massa se:

   (a) as partículas são distinguíveis;

   (b) as partículas são idênticas, têm spin 1/2 e estão em um estado singleto $S = 0$;

   (c) as partículas são idênticas, têm spin 1/2 e estão em um estado tripleto ($S = 1$);

   (d) as partículas são idênticas e têm spin 0.

2. Duas partículas de spin 1/2 em uma dimensão espacial encontram-se sob a influência de um potencial de paredes impenetráveis: $V(x) = 0$ para $0 < x < L$, e $V(x) = \infty$ caso contrário. Para responder os itens abaixo, suponha que as parículas não interajam entre si.

   (a) Escreva a função de onda do estado fundamental do sistema de duas partículas e obtenha a energia correspondente quando elas se encontram num de spin tripleto.

   (b) Repita o item anterior, supondo agora que o estado de spin é singleto.

3. Obtenha a energia do estado fundamental do átomo de Hélio em primeira ordem de teoria de perturbação , tomando como Hamiltoniano de perturbação o termo descrevendo a repulsão eletrostática entre os dois elétrons: $V = e^2/r_{12}$ onde $e^2 = q^2/(4\pi\epsilon_0)$, onde q representa o módulo da carga do elétron, e $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Determine o estado fundamental em ordem zero (não esqueça da parte spinorial).

4. Repita a questão anterior, para estados excitados envolvendo simultaneamente os estados orbitais de uma partícula $|100\rangle$ e $|200\rangle$, onde $|n\ell m\rangle$ representam os autoestados simultâneos de $H_0 = P^2/(2m) - e^2/r$, L^2 e L_z.

5. Estados GHZ (Greenberger, Horne e Zeilinger) e violação do principio de localidade de Einstein. Considere o seguinte estado emaranhado de 3 partículas de spin 1/2

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|+\rangle_2|+\rangle_3 - |-\rangle_1|-\rangle_2|-\rangle_3).$$

   A parte orbital do estado, omitida por simplicidade, é tal que as tres partículas estejam muito distantes umas das outras. Os estados $|\pm\rangle_i$ são auto-estados de σ_{iz}, $i = 1, 2, 3$.

   (a) Numa medida da componente z do spin total, $S_z = \sum_{i=1}^{3} S_{iz}$, quais são os resultados possíveis e respectivas probabilidades?

   (b) Mostre que

$$\sigma_{1x}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3y}\;\sigma_{1y}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3y}\;\sigma_{1y}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3x} = -\sigma_{1x}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3x}$$

(c) Mostre que $|\psi\rangle$ é auto-estado dos quatro operadores

$$\sigma_{1x}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3y}, \quad \sigma_{1y}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3y}, \quad \sigma_{1y}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3x}, \quad \sigma_{1x}\,\sigma_{2x}\,\sigma_{3x},$$

e determine os auto-valores correspondentes.

(d) Pelo principio de localidade de Einstein, deve-se atribuir um elemento de realidade m_{1x} ao observavel σ_{1x} já que uma medida das componentes y de spin das duas particulas distantes determina univocamente o valor deste observavel, desde que o sistema de tres particulas esteja no estado $|\psi\rangle$, já que este é um autoestado de $\sigma_{1x}\,\sigma_{2y}\,\sigma_{3y}$. Usando argumentos analogos, atribuímos elementos de realidade às componentes x e y das tres particulas, que devem satisfazer as equacoes:

$$m_{1x}\,m_{2y}\,m_{3y} = 1$$

$$m_{1y}\,m_{2x}\,m_{3y} = 1$$

$$m_{1y}\,m_{2y}\,m_{3x} = 1.$$

Examinando o produto dessas tres equações , mostre que elas estão em desacordo com a Mecânica Quântica.