Instituto de Física — UFRJ
Mecânica Quântica 2 – 2018-1 – Prof. Paulo A. Maia Neto
Lista 1

1. As matrizes de Pauli são definidas por:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mostre que:

(a) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{1}$

(b) $\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z, \quad \sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x, \quad$ e $\quad \sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$

(c) $\sigma_x\sigma_y\sigma_z = i\mathbb{1}$

(d) Note que as fórmulas dos itens **a)** e **b)** podem ser condensadas como $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}$ e $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}I + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ Mostre a partir dessa expressão que $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k$.

(e) Obtenha a matriz $[\sigma_z]_{\mathcal{B}_x}$ que representa o operador σ_z na base de autovetores de σ_x : $\mathcal{B}_x \equiv \{|+\rangle_x, |-\rangle_x\}$.

2. Considere o operador vetorial

$$\vec{\sigma} \equiv \sigma_x\vec{i} + \sigma_y\vec{j} + \sigma_z\vec{k}.$$

(a) Determine os autovalores (espectro) de $\sigma_n \equiv \vec{n}\cdot\vec{\sigma}$, onde $\vec{n}$ é um vetor unitário real qualquer. Comente o seu resultado à luz da propriedade de isotropia espacial. Utilizando unicamente o resultado para o espectro de σ_n, determine σ_n^2. Justifique cuidadosamente.

(b) Calcule os autovetores de σ_n em termos dos ângulos em coordenadas esféricas que definem a direção do unitário $\vec{n}$: $\vec{n} = \mathrm{sen}\theta\,\cos\varphi\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,\vec{\mathrm{j}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{k}}$.

(c) Mostre que $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\mathbb{1} + i\,\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{\sigma}$.

(d) Calcule o comutador $[\sigma_n, \sigma_{n'}]$. Qual é a condição sobre os unitários $\vec{n}$ e $\vec{n}'$ para que σ_n e $\sigma_{n'}$ sejam compatíveis?

(e) Mostre que qualquer matriz 2×2 hermitiana pode ser escrita como

$$M = \frac{1}{2}\{a\mathbb{1} + \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\}$$

onde $a = \mathrm{tr}(M)$ e $p_i = \mathrm{tr}(M\sigma_i)$