Instituto de Física — UFRJ
Mecânica Quântica 2 – 2018-1 – Prof. Paulo A. Maia Neto
Lista 2

1. Suponha que uma partícula de spin 1/2 é preparada com componente de spin igual a $+\hbar/2$ ao longo do eixo Oz. Qual é a probabilidade de encontrar o spin dessa partícula orientado no sentido positivo de um eixo que forma um ângulo θ com o eixo Oz original (eixo definido por vetor unitário $\hat{n}(\theta,\varphi)$)? *Sugestão*: use o resultado para o auto-estado de S_n de autovalor $\hbar/2$
$$|+\rangle_{(\theta,\varphi)} = \cos\theta/2\, e^{-i\varphi/2}|+\rangle_z + \sin\theta/2\, e^{i\varphi/2}|-\rangle_z.$$
O resultado deve depende de φ (explique)? Discuta o resultado no caso particular $\theta = \pi$.

2. Obtenha a solução da equação de movimento para o momento angular de spin médio $\vec{s} \equiv \langle \vec{S} \rangle$,
$$\frac{d}{dt}\vec{s} = \vec{\omega}_0 \times \vec{s}\,,$$
onde $\vec{\omega}_0 = -\frac{q\vec{B}}{m} = \omega_0 \hat{z}$, em termos do valor inicial $\vec{s}(t=0) = (s_{x0}, s_{y0}, s_{z0})$. Mostre que essa solução representa um movimento de precessão uniforme de $\vec{s}$ em torno de $\vec{B}$ com velocidade angular ω_0 (ou seja, que o ângulo entre $\vec{s}$ e $\vec{B}$ é constante e a projecao de $\vec{s}$ no plano xy executa um movimento circular com velocidade angular ω_0).

3. Considere uma partícula de spin 1/2 inicialmente no estado
$$|\psi\rangle_{t=0} = |+\rangle_z.$$
Esse sistema evolui sob a ação de um campo paralelo ao eixo Oy : $\vec{B} = B\hat{y}$. Calcule o estado do sistema num tempo t genérico (representação na base de auto-estados de S_z). Calcule o valor esperado de S_x no tempo t e interprete o resultado em termos da precessão de Larmor, com o auxílio de um desenho. Ao medir S_y no tempo t, quais são os resultados possíveis, e respectivas probabilidades? Ao medir S_x no tempo $t = \pi/(2\omega_0)$ (ω_0 é a frequência de Larmor) quais são os resultados possíveis, e respectivas probabilidades?

4. Considere o problema de Stern-Gerlach, com um campo não-uniforme constante dado por $\vec{B}(x,y,z) = (0, -\alpha y, B_0 + \alpha z)$.

   (a) Mostre que essa expressão é consistente com as equações de Maxwell.

   (b) Mostre que
   $$\frac{d}{dt}\langle \vec{P} \rangle = \alpha\mu_B \langle [\vec{\nabla}, (-Y\sigma_y + Z\sigma_z)] \rangle$$
   Calcule o comutador e obtenha uma expressão envolvendo apenas os operadores de Pauli. Determine a força média para os seguintes estados: $|\pm\rangle_z$ e $|+\rangle_x$. Por que podemos desprezar a força ao longo da direção y para qualquer estado de spin inicial no experimento de Stern-Gerlach?

(c) Mostre, por substituição direta, que a soluçao aproximada para o estado do elétron no tempo t é dada por

$$[\psi](x,z,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \begin{pmatrix} c_+(0) e^{i(p_0 x + \alpha \mu_B t\, z)/\hbar} e^{-i\omega_+ t} \\ c_-(0) e^{i(p_0 x - \alpha \mu_B t\, z)/\hbar} e^{-i\omega_- t} \end{pmatrix}$$

com $\omega_\pm = (\frac{p_0^2}{2m} \mp \mu_B B_0)/\hbar$ — isto é, mostre que a expressao acima satisfaz a equação de Schrödinger, se desprezarmos contribuições de ordem α^2 e termos rapidamente oscilantes.

5. Considere uma partícula de spin 1/2. Seja $\vec{S}$ seu spin, $\vec{L}$ seu momento angular orbital, e $|\psi\rangle$ seu estado, representado pelo spinor de Pauli

$$[\psi] = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix} .$$

Suponha que

$$\psi_+(\vec{r}) = R(r) \left[Y_{00}(\theta,\phi) + \frac{1}{\sqrt{2}} Y_{10}(\theta,\phi) \right] , \psi_-(\vec{r}) = R(r) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} Y_{11}(\theta,\phi) - Y_{10}(\theta,\phi) \right] ,$$

onde r, θ e ϕ são as coordenadas da partícula e $R(r)$ uma dada função de r.

(a) Que condição deve ser satisfeita por $R(r)$ para que $|\psi\rangle$ seja normalizado?

(b) Suponha que S_z é medido, estando a partícula no estado $|\psi\rangle$. Que resultados podem ser encontrados, e com que probabilidades? Mesma questão para L_z, e também para S_y.

(c) Ao realizar uma medida de L^2, a partícula estando no estado $|\psi\rangle$, obtemos o valor nulo. Que estado descreve a partícula logo após essa medida? Mesma pergunta se a medida de L^2 tivesse dado $2\hbar^2$.