Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Física

MECÂNICA QUÂNTICA I – 2017–2

8a Lista de exercícios

1.

(a) Mostre que os autovalores de um operador hermitiano O ($O = O^\dagger$) são reais.

(b) Mostre que os autovetores de um operador hermitiano O associados a autovalores diferentes são ortogonais. Forneça um exemplo de um operador hermitiano associado a um observável quântico e de dois de seus auto-vetores associados a autovalores distintos.

(c) Dentre os operadores: XP_x; $XP_y - YP_x$ e $L_x + iL_y$, quais são hermitianos? Justifique.

(d) Responda se a seguinte afirmação é falsa ou verdadeira: 'se dois operadores A e B possuem um auto-vetor comum, então eles comutam.' Se verdadeiro, demonstre; se falso, exiba um contra-exemplo com dois operadores relevantes na Mecânica Quântica.

2. Sejam L_x,L_y, e L_z, operadores de momento angular e $|\ell, m\rangle$ um auto estado simultâneo de L^2 e L_z com autovalores $\ell(\ell+1)\hbar^2$ e $m\hbar$. Os operadores abaixamento e levantamento são definidos por $L_+ = L_x + iL_y$ e $L_- = L_x - iL_y$.

a) O vetor de estado $|0, 0\rangle$ é autoestado de L_x ? Caso negativo, justifique, caso afirmativo determine o auto-valor.

b) É possível construir uma base de auto-vetores simultâneos de L^2, L_x e L_z ? Justifique e comente a sua resposta à luz do item (a).

c) Calcule um autovetor simultâneo de L^2 e L_x que tenha autovalores $2\hbar^2$ e 0, respectivamente, em função dos autovetores $|\ell, m\rangle$.

3. Uma partícula sem spin, de massa m e carga q está sujeita a um campo magnético homogêneo e constante, B, paralelo ao eixo x. A hamiltoniana é então:

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{q\hbar}{2m} B L_x$$

(a) Qual é a equação horária para $< \vec{L} >$?

(b) Se em $t = 0$ a função de onda é

$$\psi(x, y, z, 0) = \frac{e^{ikx}}{(2\pi)^{3/2}},$$

qual é a função de onda em um tempo $t_0 > 0$?

4.

Teorema do virial.

(a) A partir de

$$\frac{d}{dt} < \psi| \ \vec{R}.\vec{P} \ |\psi >= \frac{i}{\hbar} < \psi| \ [H, \vec{R}.\vec{P}] \ |\psi > \qquad \text{e} \quad H = \frac{P^2}{2m} + V(r),$$

demonstre que

$$< \psi| \ \frac{P^2}{2m} \ |\psi >= \frac{1}{2} < \psi| \ \vec{r}.\vec{\nabla} V(r) \ |\psi >,$$

se $|\psi >$ é um estado estacionário.

(b) Calcule os valores médios da energia cinética e da energia potencial quando o átomo de hidrogênio se encontra em um de seus auto estados de energia, associado ao auto valor $E_n = -\frac{e^2}{2a_0 n^2}$.

5. Considere um elétron (carga $-q$, massa m) no campo Coulombiano de um núcleo de massa M e carga Zq, onde Z é o número atômico. O potencial de interação é

$$V(r) = -\frac{Z\,q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \equiv -\frac{Ze^2}{r}.$$

Considere a função de onda do elétron

$$\psi(r) = \exp(-r/a).$$

a) Determine a condição sobre a constante a para que ψ corresponda a um estado estacionário.

b) Uma vez satisfeita a condição do item a), determine o valor de energia associado ao estado ψ.

c) Obtenha a partir do resultado do item a) a expressão para o raio de Bohr a_0, que é a escala de comprimento relevante para o problema do átomo de hidrogênio.

d) Em qual das duas situações a distância média entre o núcleo e o elétron é maior: $Z \gg 1$ ou $Z = 1$? Justifique cuidadosamente (não é cobrado o cálculo do valor médio).

e) Estando o elétron no estado ψ, é feita uma medida dos observáveis L^2 e L_z. Determine os resultados possíveis e respectivas probabilidades.