Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Física

MECÂNICA QUÂNTICA I – 2003.1

2ª PROVA - 01/07/2003- Duração: 2 horas

1. Sejam L_x,L_y, e L_z, os operadores de momento angular orbital e $|l,m\rangle$ um auto estado simultâneo de $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ e L_z com autovalores $l(l+1)\hbar^2$ e $m\hbar$. Demonstre, a partir das regras de comutação dos operadores L_x, L_y, e L_z, que

$$\langle l,m|L_x|l,m\rangle = 0$$

2.

(a) Mostre que o valor médio do operador $f(\vec{r},\vec{p})$ em um estado estacionário qualquer é uma constante.

(b) A partir de

$$\frac{d}{dt} < \psi|\ \vec{r}.\vec{p}\ |\psi >= \frac{i}{\hbar} < \psi|\ [H,\vec{r}.\vec{p}]\ |\psi > \qquad \text{e} \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(r),$$

demonstre que

$$< \psi|\ \frac{\vec{p}^2}{m}\ |\psi >=< \psi|\ \vec{r}.\vec{\nabla}V(r)\ |\psi >,$$

se $|\psi >$ é um estado estacionário.

(c) Calcule os valores médios da energia cinética e da energia potencial quando o átomo de hidrogênio se encontra em um de seus auto estados de energia, associado ao auto valor $E_n = -\frac{e^2}{2a_0 n^2}$.

3. Em um certo instante prepara-se um estado de um elétron no campo coulombiano do próton :

$$\psi(r) = Ne^{-r/(3a_0)}\cos^2\theta$$

onde r é a distância entre o elétron e o próton, $a_0 = \hbar^2/(\mu e^2)$ é o raio de Bohr e N é uma constante de normalização.

(a) Qual é a probabilidade *a priori* de, ao se fazer uma medida neste instante, encontrar-se o valor $2\hbar^2$ para o quadrado do momento angular orbital?

(b) Qual é a probabilidade *a priori* de, ao se fazer uma medida neste instante, encontrar-se o valor $E_1 = -\frac{e^2}{2a_0}$ para a energia?

4. Uma partícula de massa m está sujeita ao potencial unidimensional $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. No instante $t = 0$ prepara-se o estado:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\phi_2\rangle,$$

onde $|\phi_n\rangle$ representa um auto estado de $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ associado ao auto valor $\hbar\omega(n + 1/2)$.

(a) Escreva a expres para o estado $|\psi(t_0)\rangle$ para $t_0 > 0$;

(b) Qual é a probabilidade *a priori* de encontrarmos a partícula com energia $\frac{5}{2}\hbar\omega$ no instante t_0?

(c) Qual é valor médio do operador energia H nos instantes i) $t = 0$ e ii) $t = t_0$?

(d) Quais os valores médios do operador posição, x, da partícula nos tempos $t = 0$ e $t = t_0$?

(e) É feita uma medida da energia no tempo $t_1 > t_0$ e encontra-se o valor $\frac{3}{2}\hbar\omega$. Posteriormente, em $t = t_2$, é feita nova medida da energia. Qual é a probabilidade de obter-se o valor $\frac{5}{2}\hbar\omega$?

Sugestão: Utilize os operadores $a = (x/x_0 + ipx_0/\hbar)$ e $a^\dagger = (x/x_0 - ipx_0/\hbar)$, $x_0 = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$, para calcular elementos de matriz.