Universidade Federal do Rio de Janeiro – Mec. Quântica I – 2017-2

LISTA 7

1. O operador momento angular orbital é definido pela expressão
$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} \tag{1}$$
   (a) Calcule o comutador $[L_k, P_j]$. A partir desse resultado, mostre que $[L_k, P^2] = 0$. Como consequência mostre que $\mathbf{L}$ é uma constante de movimento para uma partícula num potencial central.

   (b) Obtenha as expressões para os dois operadores $L_\pm = L_x \pm i L_y$ em coordenadas esféricas.

   (c) Partindo do resultado para o item anterior, e usando a expressão para L_z em coordenadas esféricas, obtenha a representação do operador L^2 em coordenadas esféricas
$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_\phi^2 \right]$$

2. (a) A partir do resultado geral para $Y_{\ell,\ell}(\theta,\phi)$, escreva a expressão para $Y_{2,2}(\theta,\phi)$, e use-a para derivar as expressões de $Y_{2,1}(\theta,\phi)$ e $Y_{2,0}(\theta,\phi)$.

   (b) Esboce os diagramas polares de $|Y_{2,2}(\theta,\phi)|^2$, $|Y_{2,1}(\theta,\phi)|^2$, $|Y_{2,0}(\theta,\phi)|^2$ e comente o resultado.

   (c) Aplique o operador L_- a $Y_{2,0}(\theta,\phi)$ e verifique se a condição $Y_{2,-1}(\theta,\phi) = -Y^*_{2,1}(\theta,\phi)$ é satisfeita.

   (d) Expresse os harmônicos esféricos $Y_{2,m}(\theta,\phi)$ em termos das coordenadas cartesianas x, y e z.

   (e) Uma partícula em um potencial esfericamente simétrico está em um estado descrito pela funçao de onda
$$\psi(x,y,z) = C(xy + yz + zx)\, e^{-\alpha r^2}\,.$$
   Qual é a probabilidade de que uma medida do quadrado do momento angular forneça o valor 0? Qual é a probabilidade de que a medida forneça o valor $6\hbar^2$? Se o valor de ℓ é medido como sendo 2, quais são as probabilidades relativas de encontrar $m = 2, 1, 0, -1, -2$?

3. Obtenha os níveis de energia e as funções de onda para uma partícula de massa M dentro de uma esfera impenetrável de raio a, para estados com $\ell = 0$ e $\ell = 1$.

4. Considere um elétron no campo Coulombiano de um próton. Calcule as funções de onda radiais para os estados de onda s com $n = 1$ e 2, os valores médios de $\hat{r} \cdot \mathbf{R}$ (componente radial da coordenada relativa) e os pontos de máximo da densidade de probabilidade para a coordenada relativa.

5. Um elétron no campo Coulombiano de um próton se encontra no estado
$$\frac{1}{6}\left[4\psi_{100} + 3\psi_{211} - \psi_{210} + \sqrt{10}\psi_{21-1} \right]$$

a) Qual é o valor esperado da energia? **b)**Qual é o valor esperado de L^2? **c)**Qual é o valor esperado de L_z? **d)**Ao se fazer uma medida de L_z, quais são os valores possíveis ? Quais são as probabilidades de encontrar cada um desses valores?