Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Física

MECÂNICA QUÂNTICA I – 2017-2

6ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Para toda esta lista, suponha que uma partícula de massa m está sob a ação do potencial harmônico $V(x) = m\omega^2 x^2/2$.

1.

(a) A partir da relação $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger |n-1\rangle$, mostre que

$$\varphi_n(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{2n}}(\tilde{x} - \frac{d}{d\tilde{x}})\varphi_{n-1}(\tilde{x})$$

onde $|n\rangle$, é um autoestado do operador $a^\dagger a$ com autovalor n, $\varphi_n(\tilde{x}) = \langle \tilde{x}|n\rangle$ e $\tilde{x} = x/x_0$ $(x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)})$.

(b) Usando o resultado do item anterior e a expressão para $\varphi_0(\tilde{x})$, mostre que

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right) \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right],$$

onde $H_n(\tilde{x})$ é um polinômio de grau n (polinômio de Hermite) dado por

$$H_n(\tilde{x}) = (2\tilde{x} - \frac{d}{d\tilde{x}})^n 1.$$

(c) Mostre que $H_n(\tilde{x})$ tem a paridade de n.

(d) Determine H_0, H_1, H_2 e H_3.

(e) Mostre, explicitamente, que as três primeiras autofunções do Hamiltoniano são ortogonais entre si.

(f) Faça um gráfico da densidade probabilidade $\varphi_{10}(x)^2$ em função de x e compare com o resultado clássico (obtenha $H_{10}(\tilde{x})$ de uma tabela).

2. Calcule os valores médios e incertezas de X e P para um autoestado $|n\rangle$ qualquer de H. Mostre que $\Delta\hat{X} = \Delta\hat{P}$ e que $\langle V\rangle = \langle T\rangle$. Mostre, ainda, que o estado fundamental tem incerteza mínima.
Sugestão: use o método algébrico.

3. Estados coerentes - Embora o operador a não seja hermiteano, você mostrará agora que ele possui autoestados à direita, chamados de *estados coerentes.* As propriedades destes estados, que possuem grande importânica na teoria quântica da coerência da luz e, mais geralmente, na óptica quântica, foram descobertas por R. Glauber, que recebeu metade do prêmio Nobel de Física de 2005 por suas contribuições nessa área.

(a) Seja $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, com λ complexo, e $\psi_\lambda(\tilde{x}) = \langle\tilde{x}|\lambda\rangle$ a função de onda correspondente ao estado $|\lambda\rangle$ na base $|\tilde{x}\rangle$ (lembre-se que $X = x_0\hat{X}$, $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$, $\tilde{x} = x/x_0$ são os autovalores de $\hat{X}$.). Mostre que a condição $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ é equivalente à equação diferencial

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{x} + \frac{d}{d\tilde{x}}\right)\psi_\lambda(\tilde{x}) = \lambda\psi_\lambda(\tilde{x})\,.$$

(b) Deduza que a solução desta equação (a menos de um fator de fase) que satisfaz à condição de normalização $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_\lambda(\tilde{x})|^2 d\tilde{x} = 1$ é, se $\lambda = |\lambda|e^{-i\phi}$,

$$\psi_\lambda(\tilde{x}) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-|\lambda|^2\,\sin^2\phi} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{x}-\sqrt{2}\,\lambda)^2}\,,$$

correspondendo à função de onda normalizada

$$\psi_\lambda(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-|\lambda|^2\,\sin^2\phi} e^{-(m\omega/2\hbar)(x-\sqrt{2\hbar/m\omega}\,\lambda)^2}\,,$$

que representa o estado fundamental do oscilador harmônico transladado de $\sqrt{2\hbar/m\omega}\,\lambda$. isto prova a existência de um autoestado de a à direita.

(c) Note que estes resultados implicam que $\langle\lambda|a^\dagger = \langle\lambda|\lambda^*$, e portanto $\langle\lambda|$ é autoestado de $a^\dagger$ à esquerda, com autovalor λ^*. Por outro lado, usando procedimento análogo ao adotado nos itens **(a)** e **(b)**, prove que $a^\dagger$ não possui autoestados à direita, mostrando que a solução da equação diferencial resultante de $a^\dagger|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ não é normalizável. Conclua, ainda, que a não possui auto-estados à esquerda.

(d) Mostre que a expansão do estado $|\lambda\rangle$ em termos dos autoestados de energia do oscilador harmônico, $|n\rangle$, é, a menos de um fator de fase,

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\,,$$

sendo $\langle\lambda|\lambda\rangle = 1$. *Sugestão:* Use a expansão $|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$ na equação $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ e determine os coeficientes c_n utilizando a ortogonalidade dos auto estados da energia e a normalização de $|\lambda\rangle$.

(e) Usando o resultado do item anterior, mostre que $|\langle\lambda|\lambda'\rangle|^2 = \exp(-|\lambda - \lambda'|^2)$. Portanto, dois estados coerentes correspondentes a lambdas diferentes não são ortogonais entre si. Explique como esta propriedade está relacionada ao fato de a não ser Hermitiano.

(f) Seja $\lambda = |\lambda|e^{-i\phi}$. Mostre que

$$\langle\lambda|X|\lambda\rangle = \sqrt{2}x_0|\lambda|\cos\phi\,,$$

e portanto o valor médio de X em um estado coerente é diferente de zero, consistentemente com o fato de que o estado coerente corresponde ao estado fundamental transladado do oscilador harmônico. *Sugestão:* Expresse X em termos de a e $a^\dagger$.

(g) Usando a expansão obtida no item **(d)**, mostre que, se o estado inicial do oscilador é um estado coerente $|\lambda_0\rangle$, ele permanece um estado coerente $|\psi(t)\rangle = |\lambda(t)\rangle$, a menos de uma fase, com $\lambda(t) = \lambda_0 e^{-i\omega t}$. Mostre ainda que, se $\lambda_0 = |\lambda_0|e^{-i\phi}$,

$$\langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle = \sqrt{2}x_0|\lambda_0|\cos(\omega t + \phi)\,.$$

este resultado corresponde a uma partícula oscilando classicamente com amplitude $\sqrt{2\hbar/m\omega}\,|\lambda_0|$ e fase ϕ, e é um exemplo do caráter "quase clássico" dos estados coerentes. Use o teorema de Ehrenfest para calcular o valor médio do momento em função do tempo.

(h) Mostre que as incertezas $\Delta\hat{X}$ e $\Delta\hat{P}$ são iguais para um estado coerente, e que o produto destas incertezas é igual ao valor mínimo permitido pela relação de Heisenberg. Compare com o resultado da questão 2 e comente.