Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Física

MECÂNICA QUÂNTICA I – 2005/2

PRIMEIRA PROVA — 13/09/2005

1. [4.0]

Na medida de polarização linear com o polarizador, podemos associar o número $a_1 = 1$ à passagem do fóton pelo polarizador, e o número $a_2 = 0$ à situação em que o fóton não passa. O estado de polarização linear na direção formando um ângulo θ em relação à vertical é $|\theta\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|\pi/2\rangle$, onde $|0\rangle$ e $|\pi/2\rangle$ são os estados de polarização linear vertical e horizontal, respectivamente.

a) Escreva uma expressão para o operador Π_θ associado à medida com o eixo do polarizador alinhado na direção θ em relação à vertical, levando em conta os valores de a_1 e a_2 definidos acima.

b) Mostre que $\Pi_\theta^2 = \Pi_\theta$.

c) Determine a matriz $[\Pi_\theta]_{\mathcal{B}(\theta)}$ que representa Π_θ na base $\mathcal{B}(\theta) = \{|\theta\rangle, |\theta + \pi/2\rangle\}$

d) Determine a matriz $[\Pi_\theta]_{\mathcal{B}}$ que representa Π_θ na base $\mathcal{B} = \{|0\rangle, |\pi/2\rangle\}$

e) Calcule o comutador $[\Pi_\theta, \Pi_{\theta'}]$ (se preferir, basta apresentar a representação em alguma base).

f) Qual é a condição sobre θ e θ' para que Π_θ e $\Pi_{\theta'}$ sejam observáveis compatíveis? Porque a condição envolve apenas a *diferença* $\theta - \theta'$, e não depende de θ e θ' separadamente? Explique o significado de 'compatibilidade' na Mecânica Quântica, tomando o exemplo obtido neste item.

2. [4.0]

Os estados de um certo sistema quântico pertencem a um espaço vetorial de dimensão 2, gerado pela base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. O Hamiltoniano do sistema é

$$H = iv\left(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|\right),$$

onde v é uma constante real.

(a) Calcule o Hermitiano conjugado do operador H, tomando a expressão no lado direito da equação acima.

(b) Determine os estados estacionários e os níveis de energia correspondentes.

(c) O estado $|2\rangle$ é estacionário? Caso afirmativo, justifique; caso negativo determine a sua evolução temporal (isto é, calcule o estado para um tempo t genérico, supondo que o estado em $t = 0$ é $|2\rangle$).

(d) Supondo que o estado do sistema é $|2\rangle$ em $t = 0$, determine a probabilidade de medir o sistema no estado $|1\rangle$ no tempo t.

3. [2.0]
Considere o Hamiltoniano

$$H = E|a\rangle\langle a| + E'\left(|b\rangle\langle b| + |c\rangle\langle c|\right) + E''|d\rangle\langle d|$$

onde os vetores de estado $|a\rangle$, $|b\rangle$, $|c\rangle$ e $|d\rangle$ são ortogonais entre si e de norma unitária, e $E'' > E' > E$.

a) O estado $(|a\rangle + |b\rangle)/\sqrt{2}$ é estacionário? E o estado $(|b\rangle + i|c\rangle)/\sqrt{2}$? Justifique, e obtenha a evolução temporal se a resposta for negativa.

b) Suponha que o sistema se encontre, em $t = 0$, no estado (já normalizado)

$$|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi\rangle - \frac{1}{3}|b\rangle + \sqrt{\frac{2}{9}}|c\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|d\rangle,$$

onde

$$|\phi\rangle = \left(|a\rangle + |b\rangle\right)/\sqrt{2}$$

Determine a probabilidade $p(E')$ de obter E' numa medida de H em $t = 0$.