Universidade Federal do Rio de Janeiro – Mec. Quântica I – 2017-2

LISTA 4

1. Uma partícula de massa m está submetida ao potencial unidimensional

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \leq a/2\,, \\ +\infty & \text{se } |x| > a/2 \end{cases}$$

(a) Mostre que o espectro de H é dado pelo conjunto $\{\mathcal{E}_n = n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2, n = 1, 2...\}$. Determine as autofunções $\phi_n(x)$ correspondentes.

Para os itens abaixo, suponha que o estado da partícula no instante $t = 0$ é:

$$\psi(x, 0) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x) + a_4\phi_4(x)\,. \tag{1}$$

(b) É possível, por uma escolha especial dos coeficientes $a_i(i = 1, 2, 3, 4))$, preparar-se um estado da forma dada pela eq. (1) tal que ao se fazer uma medida da energia, se encontre o valor $\mathcal{E} = 25\pi^2\hbar^2/2ma^2$? Justifique sua resposta.

Considere para os itens (c)–(f) $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_2 = i\frac{1}{\sqrt{8}}, a_3 = -i\frac{1}{\sqrt{8}}, a_4 = i\frac{1}{2}$.

(c) Qual é a probabilidade de encontrar um valor inferior a $3\pi^2\hbar^2/ma^2$ ao fazermos uma medida da energia da partícula no tempo $t = 0$?

(d) Qual é o valor médio da energia da partícula no tempo $t = 0$?

(e) Qual é o valor médio do momento da partícula no tempo $t = 0$?

(f) Qual é o estado $\psi(x, t)$ no instante t? Quais resultados encontrados nos itens anteriores permanecem válidos para um instante t qualquer? Justifique sua resposta.

(g) Suponha que uma medida da energia no tempo t_0 fornece o resultado $2\pi^2\hbar^2/ma^2$. Após a medida, qual é o estado do sistema? Em uma medida subsequente, em $t > t_0$, qual será o valor da sua energia?

(h) Suponha agora que partícula esteja no n-ésimo estado estacionário. Qual é a probabilidade de o momento da partícula estar no intervalo $(p,\, p + dp)$? Esboce a distribuição de momentos para n grande e mostre que o resultado está de acordo com o Princípio da Correspondência.

2. Encontre as equações que determinam o espectro de energia dos estados ligados de um poço de potencial quadrado unidimensional com profundidade V e largura a ($V(x) = -V$ se $|x| \leq a/2$ e $V(x) = 0$ se $|x| > a/2$). Calcule explicitamente as funções de onda normalizadas para os dois estados de mais baixa energia.

3. Uma partícula de massa m move-se em uma dimensão sob a ação de um potencial $V(x) = -\lambda\delta(x)\,, \quad \lambda > 0$.

(a) Mostre a partir da equação de Schrödinger que nesse caso a derivada da função de onda sofre uma descontinuidade em $x = 0$, de modo que

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{0+} - \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{0-} = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0)\,.$$

Como essa descontinuidade é finita, a função de onda permanece contínua em $x = 0$.

(b) Calcule os estados ligados (energias e funções de onda) para esse potencial. Para isso, resolva a equação de Schrödinger à esquerda e à direita do potencial e aplique as condições de continuidade da função de onda e de descontinuidade de sua derivada em $x = 0$.

4. Considere o estado estacionário geral para uma partícula livre de massa m com energia $\mathcal{E}$:

$$\psi_{\mathcal{E}}(x,t) = \left(A_+ e^{ipx/\hbar} + A_- e^{-ipx/\hbar}\right) e^{-i\mathcal{E}t/\hbar}\,.$$

Determine a relação entre $\mathcal{E}$ e p. Mostre que a corrente de probabilidade correspondente é $j = v(|A_+|^2 - |A_-|^2)$. Determine v como função de m e p. Interprete esse resultado. Mostre ainda que a densidade de probabilidade vale

$$|\psi_{\mathcal{E}}|^2 = |A_+|^2 + |A_-|^2 + A_+A_-^* e^{2ipx/\hbar} + A_-A_+^* e^{-2ipx/\hbar}\,.$$

Note que essa expressão contem termos oscilatórios de *interferência,* demonstrando propriedades ondulatórias.

5. Nessa questão, demonstra-se que os estados ligados (estados estacionários associados à parte discreta do espectro de energia) de uma partícula em uma dimensão são não degenerados. Sejam $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ duas auto-funções associadas ao mesmo auto-valor $\mathcal{E}$ do hamiltoniano.

(a) Mostre que

$$\frac{\psi_1''}{\psi_1} = \frac{\psi_2''}{\psi_2}.$$

(b) A partir da equação acima obtenha o resultado para o Wronskiano de ψ_1 e ψ_2

$$\psi_1'\psi_2 - \psi_2'\psi_1 = C$$

onde C é uma constante.

(c) Para estados ligados, mostre que $C = 0$. Mostre então que $\psi_1(x) = a\,\psi_2(x)$ onde a é uma constante.

6. Usando a propriedade de que os estados ligados são não degenerados (ver questão anterior), mostre que os estados estacionários correspondentes são funções *reais* de variável real, a menos de fase global arbitrária.