Universidade Federal do Rio de Janeiro – Mec. Quântica I – 2017-2

LISTA 3

1. Mostre que

$$\text{a)} \quad \psi(x) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

pode ser normalizada escolhendo convenientemente a constante A (calcule-a!), mas que $\langle X \rangle_\psi$ não existe para essa função de onda.

$$\text{b)} \quad \psi(x) = \frac{B}{x^2 + a^2} e^{icx^4}$$

é normalizável, mas $\langle P \rangle_\psi$ não existe para este estado. (*Moral:* Normalizabilidade não garante a existência de valores esperados de observáveis importantes como X e P).

2. Uma partícula livre de massa m é descrita em $t = 0$ pelo pacote gaussiano

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sigma^{1/2}} e^{-x^2/2\sigma^2} \, e^{ip_0 x/\hbar}.$$

   (a) Mostre que $\psi(x, 0)$ tem norma unitária.
   (b) Calcule o valor médio e a incerteza de posição em $t = 0$.
   (c) Calcule a função de onda $\bar{\psi}(p, t = 0)$ na representação de momento.
   (d) Determine o valor médio e a incerteza de momento em $t = 0$. Mostre que o estado em $t = 0$ possui o valor mínimo permitido para o produto das incertezas de posição e de momento.
   (e) Determine a função de onda $\bar{\psi}(p, t)$ na representação de momento para um tempo t generérico.
   (f) Mostre a partir do resultado anterior que o valor médio e a incerteza de momento são constantes. Explique esse resultado diretamente a partir da expressão para o Hamiltoniano.
   (g) Calcule explicitamente $\psi(x, t)$, e mostre que a densidade de probabilidade $|\psi(x, t)|^2$ permanece Gaussiana para todo tempo t. Determine a posição do centro do pacote (valor médio $< X >_t$) e sua largura $(\Delta X)_t$ como funções do tempo.
   (h) Calcule $< X >_t$ diretamente a partir dos resultados dos items (b) e (d) e do teorema de Ehrenfest, e compare com o resultado obtido a partir de $\psi(x, t)$.

3. Um oscilador harmônico é descrito pelo Hamiltoniano $H = P^2/2m + (k/2)X^2$.

   (a) Calcule as equações de movimento para $\langle X \rangle_t$ e $\langle P \rangle_t$.
   (b) Integre estas equações , calculando $\langle X \rangle_t$ e $\langle P \rangle_t$ em função dos valores iniciais dessas quantidades. Compare as expressões encontradas com as soluções correspondentes do problema clássico.