Revisão de Álgebra Linear

2. Representação numa base

espaço vetorial $\mathcal{E}$, base $\mathcal{B} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_N\rangle\}$

vetor qualquer de $\mathcal{E}$ pode ser escrito como combinação linear dos elementos de $\mathfrak{B}$

$$|\varphi\rangle = c_1|v_1\rangle + c_2|v_2\rangle + ... + c_N|v_N\rangle$$

decomposição é única!

vetor coluna de N componentes $\quad [|\varphi\rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_N \end{pmatrix}$

isomorfismo entre $\mathcal{E}$ e espaço vetorial $\mathbb{C}^n$ $\quad |\varphi\rangle \in \mathcal{E} \overset{\mathcal{B}}{\longleftrightarrow} [|\varphi\rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_N \end{pmatrix} \in C^n$

Revisão de Álgebra Linear

2. Representação numa base (continuação)

Cada base de $\mathcal{E}$ diferente define uma representação diferente!

$\mathcal{B} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_N\rangle\}$

$|\varphi\rangle = c_1|v_1\rangle + c_2|v_2\rangle + ... + c_N|v_N\rangle$

$[|\varphi\rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_N \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}' = \{|v_1'\rangle, |v_2'\rangle, ..., |v_N'\rangle\}$

$|\varphi\rangle = c_1'|v_1'\rangle + c_2'|v_2'\rangle + ... + c_N'|v_N'\rangle$

$[|\varphi\rangle]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ ... \\ c_N' \end{pmatrix}$

$\neq$

Revisão de Álgebra Linear

Exemplo: espaço vetorial associado à polarização do fóton

dimensão $N = 2$

exemplo de estado: polarização linear ângulo θ

base polarização linear H e V

$\mathcal{B}_{\text{HV}} = \{|H\rangle, |V\rangle\}$

$|\theta\rangle = \cos\theta\,|H\rangle + \sin\theta\,|V\rangle$

$[|\theta\rangle]_{\mathcal{B}_{\text{HV}}} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

base polarização circular esq/dir

$\mathcal{B}_{\text{circ}} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$

note que

$|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$

$|V\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$

então $\quad |\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\theta}|+\rangle + e^{i\theta}|-\rangle)$

$[|\theta\rangle]_{\mathcal{B}_{\text{circ}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}$

Revisão de Álgebra Linear

3. Produto interno e norma de vetor - métrica

Produto interno $(\,|u\rangle\ ,\,|v\rangle) \equiv \langle u, v\rangle$

$\langle u, v\rangle \in \mathbb{C}$

$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle^*$

Linear no 2o fator: $\quad \langle u, cv + dw\rangle = c\langle u, v\rangle + d\langle u, w\rangle$

Anti-linear no 1o fator : $\quad \langle cu + dw, v\rangle = c^*\langle u, v\rangle + d^*\langle w, v\rangle$

Norma ao quadrado: $\quad ||\,|v\rangle\,||^2 \equiv \langle v, v\rangle \in \mathbb{R}^+$

Base ortonormal $\mathcal{B} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_N\rangle\}$

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$$

Revisão de Álgebra Linear

3. Produto interno e notação de Dirac

Produto interno de vetores $|u\rangle$ e $|v\rangle$

…usando representação numa base **ortonormal** $\mathfrak{B}$

$[|u\rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_N \end{pmatrix} \qquad [|v\rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ ... \\ d_N \end{pmatrix}$

$\langle u, v\rangle = (\, c_1^* \ c_2^* \ ... \ c_N^* \,) \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ ... \\ d_N \end{pmatrix} = c_1^* d_1 + c_2^* d_2 + ... + c_N^* d_N$

Notação de Dirac: $\mathcal{E}^*$ = espaço vetorial dual de $\mathcal{E}$

elementos de $\mathcal{E}^*$ são os \`bras'

$[\langle u|]_{\mathcal{B}} = (\, c_1^* \ c_2^* \ ... \ c_N^* \,)$ $\quad$ Produto interno = 'bra-c-ket'

$\langle u, v\rangle = \langle u| \cdot |v\rangle = \langle u|v\rangle = [\langle u|]_{\mathcal{B}} \cdot [|v\rangle]_{\mathcal{B}}$ $\quad$ independe da base escolhida

Revisão de Álgebra Linear

3. Produto interno e representação numa base ortonormal

$\mathcal{B} = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle, ..., |v_N\rangle\}$

$|\varphi\rangle = c_1|v_1\rangle + c_2|v_2\rangle + ... + c_N|v_N\rangle$

$[|\varphi\rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_N \end{pmatrix} =?$

se base $\mathfrak{B}$ é ortonormal, podemos obter a representação de forma simples:

$$c_i = \langle v_i|\varphi\rangle, \ i = 1, ...N$$