Universidade Federal do Rio de Janeiro – Mec. Quântica I – 2017-2

LISTA 2

1. Autovetores e autovalores

   (a) Calcule os autovetores e autovalores da matriz
   $$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Mostre que a matriz
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   não possui dois auto-vetores linearmente independentes. Determine o único autovalor e o autovetor associado.

2. Mostre que
   $$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger.$$

3. Mostre que autovetores associados a autovalores distintos de um operador hermitiano são ortogonais.

4. Mostre que o operador $\Pi_{|u\rangle} = |u\rangle\langle u|$ satisfaz as seguintes propriedades

   (a) $\Pi^2_{|u\rangle} = \Pi_{|u\rangle}$

   (b) $\Pi^\dagger_{|u\rangle} = \Pi_{|u\rangle}$

   (c) Quem são os autovetores e autovalores de $\Pi_{|u\rangle}$?

   (d) $\Pi_{|u\rangle} = |u\rangle\langle u|$ é chamado de operador de projeção (projetor) associado ao vetor $|u\rangle$. Explique a razão de se utilizar este nome.

   (e) Vamos definir um observável associado ao operador $\Pi_{|u\rangle}$. Quais seriam os resultados possíveis da medida deste observável? E os estados corrrespondentes?

   (f) Mostre que a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|u\rangle$ numa medida deste observável vale $p = \langle \Pi_{|u\rangle} \rangle$.

5. Sistema de dois níveis. Considere o Hamiltoniano
   $$H_0 = \mathcal{E}_g |g\rangle\langle g| + \mathcal{E}_e |e\rangle\langle e|$$
   onde os vetores de estado $|g\rangle$ e $|e\rangle$ são ortogonais e de norma unitária, e $\mathcal{E}_e > \mathcal{E}_g$.

   (a) Mostre que $|g\rangle$ e $|e\rangle$ são os estados estacionários, associados aos níveis de energia $\mathcal{E}_g$ e $\mathcal{E}_e$ respectivamente.

   (b) O estado do sistema em $t = 0$ é dado por
   $$|\psi\rangle_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle).$$
   Determine o estado para $t > 0$. Para que valores de t o estado se torna ortogonal ao estado inicial?

(c) Mostre que o valor médio de um observável pode oscilar com a freqüência angular (freqüência de Bohr)

$$\omega = \frac{\mathcal{E}_e - \mathcal{E}_g}{\hbar}.$$

Forneça um exemplo de observável para o qual isto ocorre.

Para os itens seguintes, considere o Hamiltoniano

$$H = E(|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|) + V(|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|),$$

com $E > 0$, $V > 0$.

(d) Mostre que H é hermitiano. Determine os estados estacionários $|+\rangle$ e $|-\rangle$ e os níveis de energia correspondentes E_+ e E_-. Sugestão: use a representação na base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$.

(e) O estado do sistema em $t = 0$ é $|g\rangle$. Determine o estado do sistema para $t > 0$. Mostre que o sistema oscila entre os estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$ e determine a freqüência de oscilação.

6. Quando o operador Hamiltoniano H não depende explicitamente do tempo, o operador evolução temporal é dado por

$$U(t) = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right).$$

(a) Usando a série de potências da função exponencial, calcule o operador $\frac{dU}{dt}$.

(b) Usando o resutado obtido acima, mostre que o vetor de estado

$$|\psi\rangle_t = U(t)|\psi\rangle_0 = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)|\psi\rangle_0$$

satisfaz a equação de Schrödinger.

7. Considere o Hamiltoniano

$$H = \mathcal{E}\left(|g_1\rangle\langle g_1| + |g_2\rangle\langle g_2|\right) + \mathcal{E}'|e\rangle\langle e|$$

onde os vetores de estado $|g_1\rangle$, $|g_2\rangle$ e $|e\rangle$ são ortogonais entre si e de norma unitária, e $\mathcal{E}' > \mathcal{E}$. Nesse exemplo, dizemos que o espectro de H é degenerado, porque temos dois auto-estados ortogonais associados ao mesmo autovalor ($\mathcal{E}$).

(a) Escreva a forma geral dos autoestados de H associados ao nível de energia $\mathcal{E}$.

(b) Determine duas bases ortonormais distintas que diagonalizam H.

(c) O estado $(|g_1\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$ é estacionário? E o estado $(|g_1\rangle + |g_2\rangle)/\sqrt{2}$? Justifique, e obtenha a evolução temporal se a resposta for negativa.

Considere o observável associado ao operador

$$A = a|+\rangle\langle +| + a'\left(|-\rangle\langle -| + |e\rangle\langle e|\right),$$

com

$$|\pm\rangle = \left(|g_1\rangle \pm |g_2\rangle\right)/\sqrt{2}$$

(d) Mostre que A e H comutam. Sugestão: obtenha as matrizes que representam os operadores numa determinada base 'bem escolhida'.

(e) Determine a base que diagonaliza A e H simultaneamente.

(f) Mostre que o valor médio de A é constante para qualquer estado inicial.

8. Em relação à base $\mathcal{B} = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ do espaço vetorial de estados de um sistema quântico, os operadores A e B são representados pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

com a e b reais.

(a) A e B podem ser medidos simultaneamente? Justifique.

(b) Considere que a dinâmica do sistema físico seja descrita por um Hamiltoniano H independente do tempo. Determine a forma mais geral de H tal que A seja uma constante de movimento.

(c) Para o conjunto de operadores H obtido no item anterior, B é sempre constante de movimento? Caso negativo, determine quais são as condições adicionais sobre os operadores H obtidos no item anterior para que B seja uma constante de movimento.

(d) Obtenha uma base $\mathcal{B}'$ de autovetores simultâneos de A^2 e B. A medida simultânea de A^2 e B representa um teste quântico completo ou máximo, isto é, determina univocamente um estado quântico puro ? Caso negativo, justifique, caso positivo, descreva detalhadamente a determinação do estado em termos dos diferentes valores possíveis para a medida simultânea de A^2 e B.