**Universidade Federal do Rio de Janeiro – Mec. Quântica I – 2017-2**

**LISTA 1**

1. O vetor coluna

$$[|\psi\rangle]_{\mathcal{B}_{\mathrm{HV}}} = N \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi/3} \end{pmatrix} \tag{1}$$

representa um estado quântico de polarização elíptica do fóton, que propaga ao longo do eixo $z$, na representação definida pela base de estados de polarização linear ao longo de $x$ (horizontal H) e $y$ (vertical V): $\mathcal{B}_{\mathrm{HV}} = \{|\mathrm{H}\rangle, |\mathrm{V}\rangle\}$.

   (a) Determine um valor para a constante $N$ tal que $|\psi\rangle$ tenha norma unitária.

   (b) Determine a probabilidade de obter polarização linear ao longo da direção no plano $xy$ formando um ângulo $\varphi$ com o eixo $x$. Descreva como realizar o experimento utilizando um cristal birrefringente.

   (c) Para que valores de $\varphi$ a probabilidade é máxima e mínima? Quais são os valores máximo e mínimo?

   (d) Utilizando os resultados dos itens anteriores, determine as direções dos eixos principais da elipse (ângulos em relação ao eixo $x$) que descreve o estado de polarização definido pela Eq. (1).

   (e) Construa uma base ortonormal contendo o vetor $|\psi\rangle$. Qual é o significado físico do(s) vetor(es) adicional(is) que compõe(m) a base? Explique em detalhe.

2. Mudança de base e representações . Os estados de polarizacao circular são dados pelas seguintes combinacoes lineares dos estados de polarizacao linear ortogonais:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{H}\rangle + i|\mathrm{V}\rangle)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{H}\rangle - i|\mathrm{V}\rangle)$$

Os estados de polarizacao circular definem a base $\mathcal{B}_{\mathrm{circ}} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$.

(a) Obtenha o vetor coluna $[|\varphi\rangle]_{\mathcal{B}_{\text{circ}}}$ que representa o estado de polarizacao linear ao longo da direção que forma um ângulo $\varphi$ com o eixo $x$ na base $\mathcal{B}_{\text{circ}}$.

(b) Usando o resultado do item anterior, calcule a probabilidade de passagem de um foton preparado no estado de polarização circular $|+\rangle$ numa medida de polarizacao linear com analisador em ângulo $\varphi$. Discuta o seu resultado.

(c) Mostre que o conjunto $\mathcal{B}_\theta = \{|\theta\rangle,\ |\theta+\pi/2\rangle\}$ é uma base ortogonal. Obtenha o vetor coluna $[|H\rangle]_{\mathcal{B}_\theta}$.

3. Na medida de polarização linear com o cristal de calcita, podemos associar o número $a_1 = 1$ à medida da polarização do fóton no plano que contém o eixo ótico do cristal – vetor de estado $|\mathrm{H}\rangle$, raio extraordinário; e o número $a_2 = -1$ à medida da polarização do fóton na direção perpendicular ao eixo óptico – vetor de estado $|\mathrm{V}\rangle$, raio ordinário. Isso define o observável polarização $P(0)$.

   (a) Determine a matriz de $P(0)$ na base $\mathcal{B}_{\mathrm{HV}} = \{|\mathrm{H}\rangle, |\mathrm{V}\rangle\}$ de estados de polarização linear horizontal/vertical.

   (b) Determine a matriz de $P(0)$ na base $\mathcal{B}_{\text{circ}} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ de estados de polarização circular.

   (c) Determine a matriz do operador momento angular de spin do fóton $S_z$ na base $\mathcal{B}_{\mathrm{HV}}$.

   (d) Calcule os valores médios de $P(0)$ e de $S_z$ quando o estado do sistema é
$$|\psi\rangle = \frac{1}{5}(3|\mathrm{H}\rangle - 4|\mathrm{V}\rangle).$$

4. Se rodarmos o cristal de calcita de um ângulo $\theta$, podemos definir um observável polarização $P(\theta)$ análogo a $P(0)$, que foi definido na questão anterior.

   (a) Calcule o comutador $[P(\theta), P(\theta')]$ e obtenha a condição para que ele seja nulo. Interprete o seu resultado.

   (b) Calcule o comutador $[P(\theta), S_z]$.

(c) Usando as relações de incerteza envolvendo os operadores $P(0)$, $P(\pi/4)$ e $S_z$, mostre que se o fóton se encontra num auto-estado de um destes 3 operadores, a média dos outros dois será nula. Isto significa que as probabilidades para os resultados das medidas destes dois operadores são iguais (máxima 'desinformação ').