Métodos da Física Teórica II – 2021/2
6ª lista de exercícios

1. (Trabalhosa...) Encontre a função de Green associada ao seguinte problema de Sturm–Liouville modificado (condições de contorno periódicas):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[r(x)\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}\right] + [q(x) + \lambda\, p(x)]\, X(x) = f(x) \qquad (a < x < b)\,,$$

sendo $r(a) = r(b)$, $X(a) = X(b)$ e $X'(a) = X'(b)$.

. . . .

2. Encontre, pelo método direto, a função de Green associada ao seguinte problema:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}\right] = g(x) \qquad (0 < x < a)\,,$$

sendo $X(0) < \infty$ e $X(a) = 0$.

. . . .

3. Considere a seguinte equação, sujeita à condição de que $X(x)$ seja analítica em $x = \pm 1$:

$$(1 - x^2)X''(x) - 2xX'(x) + \lambda X(x) = x^2\,.$$

a) Para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ existe a função de Green?

b) Encontre, pelo método da expansão em série, a função de Green do problema. A partir desta, encontre $X(x)$.

c) Encontre todas as soluções possíveis da equação acima quando $\lambda = 1980$.

. . . .

4. O método da expansão em série também funciona quando a função $p(x)$ que aparece no problema de Sturm–Liouville (cf. exercício 1) é diferente de 1, desde que seja possível exprimir $f(x)/p(x)$ como uma série infinita de autofunções. Com isto em mente, encontre uma outra expressão para a função de Green do exercício 2, agora pelo método da expansão em série. Você consegue mostrar que elas são equivalentes?

. . . .

5. (Desafio) Encontre a função de Green associada ao operador d'Alembertiano em duas dimensões. (Este desafio é interessante porque envolve várias coisas que vimos ao longo do curso, como funções geradoras das funções de Bessel e polinômios de Legendre e a transformada de Laplace.)

. . . .

6. Encontre a função de Green associada ao operador laplaciano em duas dimensões, ou seja, a solução do seguinte problema:

$$\nabla^2_{(r)} G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta^2(\vec{r} - \vec{r}\,')\,,$$

(Comentário: esta função de Green é importante na teoria de cordas, e também está relacionada com o potencial elétrico de um fio infinito carregado.)

(Dica: você pode usar o teorema de Gauss (em 2D) e o fato de que a função de Green depende apenas da distância $|\vec{r} - \vec{r}\,'|$. A transformada e Fourier não ajuda, porque a integral não converge.)

....

7. A função de Green associada ao operador laplaciano em três dimensões que encontramos em aula satisfazia a condição de contorno $\lim_{|\vec{r}|\to\infty} G(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0$. Em geral, a função de Green é da forma

$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + H(\vec{r}, \vec{r}\,')\,,$$

onde o primeiro termo é o que obtivemos em aula e o segundo satisfaz a equação de Laplace e faz com que G satisfaça as condições de contorno específicas do problema. Mostre que, se

$$H(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{a/|\vec{r}\,'|}{4\pi|\vec{r} - (a^2\vec{r}\,'/|\vec{r}\,'|^2)|}\,,$$

então $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ é nula sobre a esfera definida por $|\vec{r}\,| = a$. Interprete este resultado à luz do método das imagens.

....

8. a) Mostre que $\delta(ax - b) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x - b/a) \quad (a, b \in \mathbb{R}\,, a \neq 0)$.

(Sugestão: calcule $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(ax - b)\,\mathrm{d}x$, sendo $g(x)$ uma função contínua arbitrária.)

b) As equações de campo de Einstein implicam que as perturbações na métrica do espaço-tempo que se propagam na forma de ondas gravitacionais obedecem à seguinte equação:

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu}(\vec{r}, t) := \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{r}, t) = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}(\vec{r}, t)\,.$$

Lembrando que a função de Green associada ao operador d'alembertiano em $(3 + 1)$ dimensões que obtivemos em aula era dada por

$$\mathtt{G}_3(\vec{r}, t; \vec{r}\,', t') = -\frac{c}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\delta(|\vec{r} - \vec{r}\,'| - c(t - t'))\,,$$

obtenha uma expressão para $\bar{h}_{\mu\nu}(\vec{r}, t)$ em termos de uma integral sobre $\mathbb{R}^3$ contendo $T_{\mu\nu}$.