

Métodos da Física Teórica II – 2021/2
4ª lista de exercícios

2. A pele de um tambor é posta a vibrar a partir de uma batida no seu centro, de modo que as equações que descrevem o sistema, em coordenadas cilíndricas, são dadas por:

$$\frac{\partial^2 u(\rho, \varphi, t)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 u(\rho, \varphi, t), \quad u(R, \varphi, t) = 0, \quad u(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \varphi, 0) = v_0 \theta_H(r - \rho),$$

onde $R > r > 0$, $v_0 > 0$ e $\theta_H(x)$ é a função degrau de Heaviside. Encontre $u(\rho, \varphi, t)$ para $t > 0$.

.....

3. Dada a seguinte definição dos polinômios de Legendre,

$$P_\ell(x) := \frac{1}{2^\ell} \sum_{k=0}^{[\ell/2]} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2\ell - 2k)!}{(\ell - 2k)!(\ell - k)!} x^{\ell - 2k} \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots),$$

mostre que $P_\ell(0) = \frac{(-1)^{\ell/2}}{2^\ell} \frac{\ell!}{[(\ell/2)!]^2}$, para ℓ par, e $P_\ell = 0$, para ℓ ímpar.

.....

4. Com auxílio da função geradora dos polinômios de Legendre,

$$\mathcal{G}(x, t) := \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x) t^\ell \quad (|x| \leq 1, \quad |t| < 1),$$

obtenha as seguintes relações de recorrência, válidas para $\ell \geq 1$:

a) $(\ell + 1)P_{\ell+1}(x) - (2\ell + 1)xP_\ell(x) + \ell P_{\ell-1}(x) = 0,$

b) $P'_{\ell+1}(x) + P'_{\ell-1}(x) - 2xP'_\ell(x) = P_\ell(x),$

c) $\ell P_\ell(x) - xP'_\ell(x) + P'_{\ell-1}(x) = 0.$

.....

5. Demonstre a seguinte fórmula de integração, válida para $\ell \geq 1$:

$$\int_a^1 P_\ell(x) dx = \frac{1}{2\ell + 1} [P_{\ell-1}(a) - P_{\ell+1}(a)] \quad (-1 \leq a \leq 1).$$

(Dica: existe uma relação de recorrência que leva diretamente a este resultado. Você pode obtê-la combinando os resultados do exercício anterior ou colando das suas notas de aula.)

.....

6. A partir da relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre na forma

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x)P_m(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1}\delta_{\ell m},$$

mostre que

$$\int_0^\pi P_\ell(\cos \theta)P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2\ell + 1}\delta_{\ell m}.$$

.....

7. A função Beta de Euler pode ser definida pela integral

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad (p, q > 0).$$

a) Fazendo a mudança de variável $x = \sin^2 \theta$, mostre que

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2p-1}(\cos \theta)^{2q-1} d\theta.$$

b) Usando esta última representação, mostre que $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

(Dica: Nas integrais que definem $\Gamma(p)$ e $\Gamma(q)$, mude as variáveis de integração para x^2 e y^2 . Escreva, então, o produto $\Gamma(p)\Gamma(q)$ e use coordenadas polares.)

c) Usando os resultados obtidos, calcule $\int_{-1}^1 [P_\ell(x)]^2 dx$ ($\ell = 0, 1, 2, \dots$).

(Dica: Use a fórmula de Rodrigues e integre por partes ℓ vezes.)

.....

1. Um cone metálico de ângulo de abertura α e extensão infinita (ou seja, nossa região de interesse é somente a vizinhança da ponta do cone) é mantido a um potencial V_0 . O cone é, então, aproximado de um plano condutor aterrado (potencial nulo) e infinito, de modo que seu eixo de simetria fique perpendicular ao plano. Desprezando a distância entre a ponta do cone e o plano, determine o potencial eletrostático e o campo elétrico produzido por esse sistema (lembrando que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$). (Dica: coloque a origem do sistema de coordenadas na ponta do cone. O potencial pode depender de $|\vec{r}|$?)

.....

8. Uma casca esférica de raio a está carregada de forma que o potencial eletrostático na sua superfície é dado por $V(a, \theta) = V_0 \sin^2 \theta$, usando unidades do Sistema Internacional. Encontre $V(r, \theta)$ dentro e fora da casca, sabendo que $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r, \theta) = 0$. Calcule, então, $\vec{E}(r, \theta) = -\vec{\nabla}V(r, \theta)$ e a carga elétrica total da casca.

.....

9. Um aro circular delgado de raio a se encontra uniformemente carregado com uma carga total Q . Escolhendo o eixo \overrightarrow{OZ} como o eixo de simetria do problema, com a origem O no centro do aro, e usando coordenadas esféricas, determine o potencial eletrostático $V(r, \theta)$ em todo o espaço (fora do aro), sabendo que $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r, \theta) = 0$. Para $r \gg a$, determine o campo elétrico $\vec{E}(r, \theta) = -\vec{\nabla}V(r, \theta)$ na aproximação de quadrupolo.

(Dica: primeiro, lembre-se de Física III e calcule o potencial no eixo \overrightarrow{OZ} . Além disso, resolva separadamente os casos $r > a$ e $r < a$.)

(Comentário: este exercício é matematicamente equivalente ao cálculo do potencial (e campo) gravitacional devido a um aro circular delgado homogêneo de massa M .)

10. Uma esfera condutora de raio a se encontra aterrada (potencial nulo). Uma carga puntiforme q é mantida a uma distância $z_0 > a$ do centro da esfera. Encontre o potencial eletrostático no exterior da esfera e, então, conclua que este potencial corresponde à soma do potencial da carga q com aquele que seria produzido por uma carga imagem q_* no interior da esfera (ou seja, “descubra” o método das imagens). Qual a posição e o valor de q_* ?

(Dica: o potencial procurado tem a forma $V(r, \theta) = V_*(r, \theta) + \frac{kq}{|\vec{r} - z_0\hat{z}|}$, de modo que V_* satisfaz a equação de Laplace com a seguinte condição de contorno (mostre isto):

$$V_*(a, \theta) = - \left. \frac{kq}{|\vec{r} - z_0\hat{z}|} \right|_{|\vec{r}|=a} = - \frac{kq}{z_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z_0}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta).$$

A solução deste problema de contorno para V_* fornece as respostas procuradas.)

11. **(Desafio)** Resolva o exercício 9 usando coordenadas cilíndricas na região $0 \leq \rho < a$, $z \geq 0$ e compare os resultados obtidos nos dois exercícios no plano do aro.

(Dados para o problema não ficar impossível:

- a transformada de Laplace de $J_0(at)$ é $(s^2 + a^2)^{-1/2}$ (mostre isto, com auxílio do resultado do exercício 3);

- $\int_0^{\infty} J_0(ax)J_0(bx) dx = \frac{2}{\pi b}K(a/b) = \frac{1}{b} \sum_{\ell=0}^{\infty} [P_{2\ell}(0)]^2 \left(\frac{a}{b}\right)^{2\ell} \quad (a < b),$

onde $K(x)$ é a integral elíptica completa do primeiro tipo.)