

Métodos da Física Teórica II – 2021/2
3ª lista de exercícios

1. Considere um sistema de coordenadas ortogonais em que um intervalo infinitesimal do espaço euclidiano é dado por

$$d\vec{s} = h_1(\xi)d\xi_1 \vec{e}_1 + h_2(\xi)d\xi_2 \vec{e}_2 + h_3(\xi)d\xi_3 \vec{e}_3 ,$$

onde \vec{e}_1, \vec{e}_2 e \vec{e}_3 são vetores unitários.

a) Calcule $\vec{\nabla}_{\xi_i}$ ($i = 1, 2, 3$) nestas coordenadas.

b) Usando o resultado do item anterior, mostre que $\vec{\nabla}_{\xi_i} \times \vec{\nabla}_{\xi_j} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k / (h_i h_j)$ (soma em k subentendida) e que, portanto, $\vec{\nabla} \cdot [\vec{e}_1 / (h_2 h_3)] = 0$, assim como suas permutações cíclicas.

(Dica: lembre-se da identidade $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$, que é independente do sistema de coordenadas. Aquele ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita, caso alguém ainda não conheça.)

2. Considere a função geradora das funções de Bessel de ordem inteira:

$$\mathcal{G}(x, t) := e^{\frac{x}{2}(t-1/t)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} J_m(x) t^m .$$

Derivando $\mathcal{G}(x, t)$ parcialmente em relação a t , deduza a seguinte identidade:

$$J_{m+1}(x) + J_{m-1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) \quad (m \in \mathbb{Z}) .$$

3. A partir da definição da função de Bessel de ordem μ ($\mu \neq -1, -2, \dots$),

$$J_\mu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \mu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\mu} ,$$

mostre que:

a) $J_{-m}(x) := \lim_{\mu \rightarrow -m} J_\mu(x) = (-1)^m J_m(x) \quad (m \in \mathbb{N}) ;$

b) $\frac{d}{dx} [x^{-\mu} J_\mu(x)] = -x^{-\mu} J_{\mu+1}(x) , \quad \frac{d}{dx} [x^\mu J_\mu(x)] = x^\mu J_{\mu-1}(x) ;$

c) os resultados do item b) implicam

$$\begin{aligned} J_{\mu+1}(x) - J_{\mu-1}(x) &= -2 \frac{d}{dx} J_\mu(x) , \\ J_{\mu+1}(x) + J_{\mu-1}(x) &= \frac{2\mu}{x} J_\mu(x) . \end{aligned}$$

(Note que esta última equação generaliza o resultado obtido na questão 2.)

4. Demonstre os resultados abaixo.

a) Lembrando que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (o que pode ser calculado diretamente da definição de $\Gamma(z)$) e que $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, mostre, por indução, que

$$\Gamma(k + 1/2) = \frac{(2k)!}{k! 2^{2k}} \sqrt{\pi} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

b) Use o resultado acima para mostrar que $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ e $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$.

c) Use uma das fórmulas obtidas na questão 3 para mostrar que $J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right)$.

.....

5. **(Desafio)** Mostre que o Wronskiano de $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ ($\nu \notin \mathbb{Z}$) é igual a $-\frac{2 \sin(\nu\pi)}{\pi x}$, usando o fato de que ambas as funções são soluções da equação de Bessel de ordem ν .

(Dica: da equação diferencial obtemos diretamente que $W(x) = c/x$, para alguma constante c (lembre-se de Métodos I). Para determinar esta constante, basta calcular o resíduo de $W(z) = J_\nu(z)J'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J'_\nu(z)$ no ponto $z = 0$ e usar a identidade $\Gamma(\nu)\Gamma(1 - \nu) = \pi/\sin(\nu\pi)$.)

.....

6. **(2ª prova de Métodos I – 2019/1, adaptada)** Numa outra versão da “dinâmica do flerte”, a variação do interesse de B em A é inversamente proporcional ao tempo, de modo que as equações que caracterizam o sistema, para $t > 0$, ficam:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{I}}_A &= \mathcal{I}_B \\ \dot{\mathcal{I}}_B &= -\frac{1}{t}\mathcal{I}_A. \end{cases}$$

a) Mostre que estas equações implicam

$$t \ddot{\mathcal{I}}_B + \dot{\mathcal{I}}_B + \mathcal{I}_B = 0.$$

b) Mostre que $\mathcal{I}_B(t) = J_0(2\sqrt{t})$ é solução desta equação. A partir desta solução, calcule $\mathcal{I}_A(t)$. (Este exercício ilustra o fato de que as funções de Bessel não aparecem apenas nas soluções da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas.)

.....

7. Um capacitor infinito de “placas” semi-cilíndricas tem sua placa superior mantida a um potencial V_0 e sua placa inferior mantida a um potencial $-V_0$. Sabendo que o raio da seção transversal do capacitor vale a , encontre uma expressão aproximada para o campo elétrico $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ válida para pontos muito (mas não infinitamente!) distantes do capacitor.

(Lembre-se de que V satisfaz a equação de Laplace.)