Métodos da Física Teórica II – 2021/2
2ª lista de exercícios

1. Considere uma corda distendida de comprimento L que tem uma extremidade presa em $x = 0$ e cuja outra extremidade pode se deslocar livremente na direção vertical (imagine que na outra extremidade há um anel de massa desprezível por dentro do qual passa sem atrito uma barra vertical).

a) (Mecânica Clássica) Mostre que a condição de contorno em $x = L$ é dada por $\dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$.

b) Encontre a função $u(x,t)$ que descreve o movimento da corda, dado que no instante $t = 0$ ela estava em repouso e $u(x,0) = b\,x$, $b > 0$. (Dica: este problema é parecido com o 4º da 1ª lista.) (Curiosidade: este problema é matematicamente equivalente ao da vibração do ar em um tubo sonoro fechado em um dos lados. Em particular, as frequências dos modos normais são as mesmas.)

2. Uma corda de violão de comprimento L é tocada ao ser puxada na posição $x = x_0$ e, então, abandonada a partir do repouso. Uma função que descreve de forma aproximada esta configuração inicial é dada por

$$u(x,0) = \begin{cases} A\,x/x_0\,, & x \in [0, x_0] \\ A(L-x)/(L-x_0)\,, & x \in [x_0, L] \end{cases}$$

Encontre a função $u(x,t)$ que descreve o movimento subsequente da corda, lembrando que "sem amortecimento não há som", ou seja,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial u}{\partial t}\,, \qquad (\gamma \ll v/L)\,.$$

O que muda no som produzido quando mudamos a posição x_0 em que a corda é dedilhada?
Qual o valor de $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$?

3. Encontre a função $u(x,t)$ que é solução do problema 2 acima quando $\gamma = 0$ através do método de D'Alembert, ou seja, partindo da solução geral $u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$, impondo as condições de contorno e depois as condições iniciais. Mostre que o resultado concorda com o limite $\gamma \to 0$ da solução encontrada no problema 2.

4. Uma membrana quadrada homogênea de lado ℓ e massa m se encontra distendida por uma tensão por unidade de comprimento T_0 e tem suas extremidades presas em um plano horizontal. Devido à ação da gravidade, a equação que descreve o deslocamento da membrana em relação ao plano horizontal é

$$\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} = \frac{\ell^2 T_0}{m} \nabla^2 u(x,y,t) - \gamma \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} - g\,.$$

Encontre a função que descreve a configuração de equilíbrio da membrana. (Sugestão: comece buscando uma função $u_1(x)$ que satisfaça a equação acima e parte das condições de contorno. Depois, encontre uma função $u_2(x,y)$ que satisfaça aquela equação quando $g = 0$ e que, quando somada a $u_1(x)$, produza uma solução de todas as condições de contorno e, portanto, do problema.)