Métodos da Física Teórica II – 2021/2
1ª lista de exercícios

1. Quando fazemos uso de métodos computacionais, é comum aproximarmos a derivada segunda de uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, calculada num certo ponto x_0, pela expressão

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}\,,$$

onde h é um pequeno passo escolhido de forma conveniente. Justifique essa aproximação com base na interpretação do operador laplaciano.

2. Considere a função de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(\vec{r}) = a\,\mathrm{sech}^2(b|\vec{r}\,|)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
(Esta função pertence à família de potenciais de Pöschl–Teller, de interesse na Mecânica Quântica.)

a) Calcule o laplaciano de f no ponto $\vec{r} = \vec{0}$ pela fórmula $\nabla^2 f := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$.
(Sugestão: use o laplaciano em coordenadas esféricas e tome o limite $|\vec{r}\,| \to 0$.)

b) Calcule o laplaciano de f no ponto $\vec{r} = \vec{0}$ pela fórmula

$$\nabla^2 f(\vec{r})\big|_{\vec{r}=\vec{0}} := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{6}{\varepsilon^2}\left[\langle f(\vec{r})\rangle\big|_{|\vec{r}\,|=\varepsilon} - f(\vec{0})\right],$$

onde $\langle f(\vec{r})\rangle\big|_{|\vec{r}\,|=\varepsilon}$ denota a média dos valores de f calculados nos pontos de $\mathbb{R}^3$ tais que $|\vec{r}\,| = \varepsilon$.

3. Duas barras delgadas idênticas, exceto pelo fato de que uma se encontra à temperatura 0 e a outra à temperatura $U > 0$, são postas em contato a partir da junção de suas extremidades. Supondo que só haja troca de calor entre as duas barras, i.e. que elas estejam termicamente isoladas do ambiente, encontre a função que descreve a temperatura de cada ponto do sistema formado pelas duas barras em um dado instante de tempo após o início da troca de calor. Se esperarmos um tempo longo o suficiente, qual será a temperatura final do conjunto? (Dica: lembre que, pela Lei de Fourier, o fluxo de calor é proporcional ao gradiente de temperatura; portanto, como não há troca de calor com o ambiente, a função procurada deve satisfazer condições de contorno de Neumann.)

4. Considere um tubo infinito (ou seja, muito mais longo do que a região que temos interesse em estudar) cheio de água pura. No instante $t = 0$, é inserida no tubo, através de um orifício na posição $x = x_0$, uma gota de corante azul de massa m. Pode-se mostrar, através da Lei de Fick, que a densidade linear de massa de corante na posição x e no instante $t > 0$, dada pela função $\rho(x,t)$, satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \sigma\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x^2}\,,$$

onde σ é o coeficiente de difusão do corante. Como o tubo é suposto infinito, as condições de contorno para este problema são $\lim_{x\to\pm\infty}\rho(x,t) = 0$. Usando a delta de Dirac, escreva a condição inicial que representa a situação descrita e, então, encontre a função $\rho(x,t)$.
(Sugestão: use a transformada de Fourier.)

5. Foi encontrada uma barra metálica de comprimento L na região da antiga usina nuclear de Chernobyl. A barra foi posta em completo isolamento (em particular, térmico), mas a contaminação por substâncias radioativas está fazendo sua temperatura aumentar segundo a equação

$$\partial_t u(x,t) = \alpha \nabla^2 u(x,t) + \beta \sin(\pi x/L)\, e^{-\lambda t}\,,$$

onde α, β e λ são constantes positivas. Encontre $u(x,t)$ sabendo que no instante $t = 0$ a temperatura em toda a barra era zero (em alguma escala).

6. Uma barra delgada de comprimento L, densidade ρ, calor específico c e condutividade térmica κ tem uma de suas extremidades presa a um enorme bloco de gelo que está derretendo, de modo que, após esperarmos um tempo suficientemente longo, a barra inteira se encontra a 0°C. Neste instante, a outra extremidade da barra (digamos, $x = 0$) passa a ser iluminada com luz laser, que lhe fornece uma potência por unidade de área constante e igual a q. Supondo que toda a potência recebida do laser seja convertida em energia térmica, encontre a função que descreve a temperatura de cada ponto da barra em um dado instante de tempo após o início da incidência da luz laser. Se esperarmos um tempo bastante longo, qual será a temperatura no ponto mais quente da barra? Que ponto é esse? (Dica: lembre-se da Lei de Fourier ($\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} u$) e tenha cuidado ao estender o domínio da função que dá a condição inicial. Que simetrias a função estendida deve ter?)

7. (Desafio) O solo de uma região próxima à antiga usina nuclear de Chernobyl está contaminado com uma substância radioativa de constante de desintegração λ. Devido a isto, o gás radioativo se difunde na atmosfera de modo que μ unidades de massa por unidade de área do solo penetram no ar por unidade de tempo. Considere tanto o solo (plano) quanto a atmosfera como meios semi-infinitos, sendo $x = 0$ a fronteira entre os dois. Por simetria, a densidade de gás radioativo na atmosfera ρ só pode depender da altura $x > 0$ e do tempo t.

a) Entenda por que a situação descrita acima é governada pelas equações

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} - \lambda \rho(x,t)\,, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x}(0,t) = -\mu\,,$$

onde σ é o coeficiente de difusão do gás.

b) Encontre a relação entre a densidade de gás e a altura após um tempo suficientemente longo.

c) Supondo $\rho(x,0) = 0$ para $x \geq 0$, use a transformada de Fourier para mostrar que

$$\rho(x,t) = \frac{2\mu\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-(\sigma k^2 + \lambda)t}}{\sigma k^2 + \lambda} \cos(kx)\, \mathrm{d}k\,.$$

d) Supondo $\rho(x,0) = 0$ para $x \geq 0$, use a transformada de Laplace para mostrar que

$$\rho(x,t) = \mu \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\lambda\tau} e^{-x^2/(4\sigma\tau)}\, \mathrm{d}\tau\,.$$

e) Mostre que os resultados dos itens c) e d) são equivalentes.

(Sugestão: use $\dfrac{1 - e^{-(\sigma k^2 + \lambda)t}}{\sigma k^2 + \lambda} = \displaystyle\int_0^t e^{-(\sigma k^2 + \lambda)\tau}\, \mathrm{d}\tau$.)