Métodos da Física Teórica II – 2020/2
5ª lista de exercícios

1. Resolva novamente o exercício 1 da lista 02, agora com as ideias de Sturm e Liouville em mente. (Note que não será necessário pensar na extensão periódica da condição inicial.)

. . . .

2. Considere, agora, uma variação do exercício 1 da lista 02 em que o anel na extremidade da corda está conectado a uma mola de constante elástica k e que fica em equilíbrio (ou seja, não exerce força sobre o anel) quando a corda está na horizontal.

a) (Mecânica Clássica) Mostre que a condição de contorno em $x = L$ é dada por

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + k\, u(L, t) = 0\,,$$

onde T_0 é a tensão da corda.

b) Encontre a função $u(x, t)$ que descreve o movimento da corda, dado que no instante $t = 0$ ela estava em repouso e $u(x, 0) = b\,x$, $b > 0$.

. . . .

3. (2,0 pt) Para assar uma batata aproximadamente esférica de raio a, você a pega no congelador, onde estava a uma temperatura de 0°C, e a põe em um forno preaquecido a 180°C.
O contato com a sua mão faz com que a distribuição de temperatura da batata ao entrar no forno (digamos, no instante $t = 0$) seja da forma $u(r, \theta, \varphi, 0) = (1 + \sin\theta \cos\varphi)r/a$. Supondo $u(a, \theta, \varphi, t) = 180$, encontre a função $u(r, \theta, \varphi, t)$ que descreve a temperatura no interior da batata, lembrando que

$$\frac{\partial u(r, \theta, \varphi, t)}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u(r, \theta, \varphi, t)\,.$$

. . . .

4. (2,0 pt) Uma esfera homogênea de raio a, inicialmente a 27°C, é jogada no fundo de um lago cujas águas se encontram a 0°C. Em vez de considerar a temperatura na superfície da esfera como sendo sempre 0°C, por estar em contato com as águas frias do lago, podemos modelar o problema um pouco mais realisticamente através da lei de resfriamento de Newton. Esta lei afirma que o fluxo de calor entre dois meios é proporcional à diferença de suas temperaturas, e pode ser escrita como

$$\vec{\mathtt{n}} \cdot \vec{\nabla} u = h\,(u_0 - u)\,,$$

onde $\vec{\mathtt{n}}$ é o vetor unitário normal à superfície que separa os meios e aponta para dentro do meio externo (de temperatura u_0) e h é uma constante proporcional à condutância térmica. Encontre a função $u(r, t)$ que descreve a temperatura dos pontos da esfera nestas circunstâncias e mostre que, se esperarmos um tempo suficientemente longo, a temperatura no centro da esfera tenderá para 0°C.

5. (2,0 pt) A equação de Schrödinger independente do tempo, para uma partícula não relativística de massa m, é dada por

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{\mathtt{r}})\right]\Psi(\vec{\mathtt{r}}) = E\,\Psi(\vec{\mathtt{r}})\,,$$

e pode ser lida como "a soma da energia cinética (correspondendo ao primeiro operador) com a energia potencial (operador $V(\vec{\mathtt{r}})$) dá a energia total E". A função de onda (normalizada) $\Psi(\vec{\mathtt{r}})$ é interpretada como a amplitude de probabilidade de a partícula ser encontrada na vizinhança da posição $\vec{\mathtt{r}}$, de modo que $\int |\Psi(\vec{\mathtt{r}})|^2\, \mathrm{d}^3\,\vec{\mathtt{r}} = 1 = 100\%$ quando a integral é feita sobre todo o espaço. Encontre os valores possíveis de E (autoenergias) e correspondentes autofunções normalizadas $\Psi(\vec{\mathtt{r}})$ para o caso de uma partícula presa em uma armadilha esférica de raio a, considerando a energia potencial nula dentro da esfera e infinita fora (o que implica $\Psi(\vec{\mathtt{r}}) = 0$ quando $|\vec{\mathtt{r}}| = a$).