Métodos da Física Teórica II – 2020/2
4ª lista de exercícios

1. Considere mais uma vez o cilindro boiando sobre águas geladas, cuja distribuição de temperaturas no regime estacionário nós obtivemos em aula. Digamos que no instante $t = 0$ o cilindro inteiro se encontrava à temperatura 100°C, e é posto em contato com a água. Encontre a expressão que fornece a temperatura de qualquer ponto do cilindro para $t > 0$.
(Dica: use coordenadas cilíndricas e escreva $u(\rho, \varphi, t) = u_{\mathrm{E}}(\rho, \varphi) + u_{\mathrm{T}}(\rho, \varphi, t)$, onde $u_{\mathrm{E}}(\rho, \varphi)$ é a solução que obtivemos em aula e $u_{\mathrm{T}}(R, \varphi, t) = 0$.)

. . . .

2. (2,0 pt) A pele de um tantam é posta a vibrar a partir de uma batida no seu centro, de modo que as equações que descrevem o sistema, em coordenadas cilíndricas, são dadas por:

$$\frac{\partial^2 u(\rho,\varphi,t)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 u(\rho,\varphi,t)\,, \quad u(R,\varphi,t) = 0\,, \quad u(\rho,\varphi,0) = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\rho,\varphi,0) = v_0\,\theta_{\mathrm{H}}(r-\rho)\,,$$

onde $R > r > 0$, $v_0 > 0$ e $\theta_{\mathrm{H}}(x)$ é a função degrau de Heaviside. Encontre $u(\rho, \varphi, t)$ para $t > 0$.

. . . .

3. Dada a seguinte definição dos polinômios de Legendre,

$$P_\ell(x) := \frac{1}{2^\ell} \sum_{k=0}^{[\ell/2]} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2\ell-2k)!}{(\ell-2k)!(\ell-k)!} x^{\ell-2k} \qquad (\ell = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

mostre que $P_\ell(0) = \dfrac{(-1)^{\ell/2}}{2^\ell} \dfrac{\ell!}{[(\ell/2)!]^2}$, para ℓ par, e $P_\ell = 0$, para ℓ ímpar.

. . . .

4. Com auxílio da função geradora dos polinômios de Legendre,

$$\mathcal{G}(x,t) := \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell(x) t^\ell \qquad (|x| \le 1, \quad |t| < 1)\,,$$

obtenha as seguintes relações de recorrência, válidas para $\ell \ge 1$:

a) $(\ell+1)P_{\ell+1}(x) - (2\ell+1)xP_\ell(x) + \ell P_{\ell-1}(x) = 0\,,$

b) $P'_{\ell+1}(x) + P'_{\ell-1}(x) - 2xP'_\ell(x) = P_\ell(x)\,,$

c) $\ell P_\ell(x) - xP'_\ell(x) + P'_{\ell-1}(x) = 0\,.$

. . . .

5. Demonstre a seguinte fórmula de integração, válida para $\ell \geq 1$:

$$\int_a^1 P_\ell(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\ell+1}\left[P_{\ell-1}(a) - P_{\ell+1}(a)\right] \qquad (-1 \leq a \leq 1)\,.$$

(Dica: existe uma relação de recorrência que leva diretamente a este resultado. Você pode obtê-la combinando os resultados do exercício anterior ou colando das suas notas de aula.)

. . . .

6. A partir da relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre na forma

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell m}\,,$$

mostre que

$$\int_0^\pi P_\ell(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell m}\,.$$

. . . .

7. A função Beta de Euler pode ser definida pela integral

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x \qquad (p,q>0)\,.$$

a) Fazendo a mudança de variável $x = \sin^2\theta$, mostre que

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

b) Usando esta última representação, mostre que $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

(Dica: Nas integrais que definem $\Gamma(p)$ e $\Gamma(q)$, mude as variáveis de integração para x^2 e y^2. Escreva, então, o produto $\Gamma(p)\Gamma(q)$ e use coordenadas polares.)

c) Usando os resultados obtidos, calcule $\displaystyle\int_{-1}^1 [P_\ell(x)]^2\,\mathrm{d}x \qquad (\ell = 0,1,2,\ldots)\,.$

(Dica: Use a fórmula de Rodrigues e integre por partes ℓ vezes.)

. . . .

8. Uma casca esférica de raio a está carregada de forma que o potencial eletrostático na sua superfície é dado por $V(a,\theta) = V_0\sin^2\theta$, usando unidades do Sistema Internacional. Encontre $V(r,\theta)$ dentro e fora da casca, sabendo que $\lim_{r\to\infty} V(r,\theta) = 0$. Calcule, então, $\vec{E}(r,\theta) = -\vec{\nabla}V(r,\theta)$ e a carga elétrica total da casca.

. . . .

9. Um aro circular delgado de raio a se encontra uniformemente carregado com uma carga total Q. Escolhendo o eixo $\overrightarrow{\mathcal{OZ}}$ como o eixo de simetria do problema, com a origem $\mathcal{O}$ no centro do aro, e usando coordenadas esféricas, determine o potencial eletrostático $V(r,\theta)$ em todo o espaço (fora do aro), sabendo que $\lim_{r\to\infty} V(r,\theta) = 0$. Para $r \gg a$, determine o campo elétrico $\vec{E}(r,\theta) = -\vec{\nabla}V(r,\theta)$ na aproximação de quadrupolo.
(Dica: primeiro, lembre-se de Física III e calcule o potencial no eixo $\overrightarrow{\mathcal{OZ}}$. Além disso, resolva separadamente os casos $r > a$ e $r < a$.)
(Comentário: este exercício é matematicamente equivalente ao cálculo do potencial (e campo) gravitacional devido a um aro circular delgado homogêneo de massa M.)

. . . .

10. (3,0 pt) Uma esfera condutora de raio a se encontra aterrada (potencial nulo). Uma carga puntiforme q é mantida a uma distância $z_0 > a$ do centro da esfera. Encontre o potencial eletrostático no exterior da esfera e, então, determine a posição e o valor da carga imagem $q_\star$ que, junto com a carga q, o produz.
(Dica: o potencial procurado tem a forma $V(r,\theta) = V_\star(r,\theta) + \dfrac{kq}{|\vec{r} - z_0\hat{\mathbf{z}}|}$, de modo que $V_\star$ satisfaz a equação de Laplace com a seguinte condição de contorno (mostre isto):

$$V_\star(a,\theta) = -\left.\frac{kq}{|\vec{r} - z_0\hat{\mathbf{z}}|}\right|_{|\vec{r}|=a} = -\frac{kq}{z_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z_0}\right)^{\ell} P_\ell(\cos\theta)\,.$$

A solução deste problema de contorno para $V_\star$ fornece as respostas procuradas.)

. . . .

11. (Desafio) Resolva o exercício 9 usando coordenadas cilíndricas na região $0 \le \rho < a$, $z \ge 0$ e compare os resultados obtidos nos dois exercícios no plano do aro.

(Dados para o problema não ficar impossível:

- a transformada de Laplace de $J_0(at)$ é $(s^2 + a^2)^{-1/2}$ (mostre isto, com auxílio do resultado do exercício 3);

- $\displaystyle\int_0^\infty J_0(ax)J_0(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi b}K(a/b) = \frac{1}{b}\sum_{\ell=0}^{\infty}[P_{2\ell}(0)]^2\left(\frac{a}{b}\right)^{2\ell} \qquad (a < b)\,,$

onde $K(x)$ é a integral elíptica completa do primeiro tipo.)