Métodos da Física Teórica II – 2020/2
3ª lista de exercícios

1. Considere um sistema de coordenadas ortogonais em que um intervalo infinitesimal do espaço euclidiano é dado por

$$\mathrm{d}\vec{s} = h_1(\xi)\mathrm{d}\xi_1\,\vec{\mathrm{e}}_1 + h_2(\xi)\mathrm{d}\xi_2\,\vec{\mathrm{e}}_2 + h_3(\xi)\mathrm{d}\xi_3\,\vec{\mathrm{e}}_3\,,$$

onde $\vec{\mathrm{e}}_1$, $\vec{\mathrm{e}}_2$ e $\vec{\mathrm{e}}_3$ são vetores unitários.

a) Calcule $\vec{\nabla}\xi_i \quad (i = 1, 2, 3)$ nestas coordenadas.

b) Usando o resultado do item anterior, mostre que $\vec{\nabla}\xi_i \times \vec{\nabla}\xi_j = \varepsilon_{ijk}\vec{\mathrm{e}}_k/(h_i h_j)$ (soma em k subentendida) e que, portanto, $\vec{\nabla}\cdot[\vec{\mathrm{e}}_1/(h_2 h_3)] = 0$, assim como suas permutações cíclicas.
(Dica: lembre-se da identidade $\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{b})$, que é independente do sistema de coordenadas. Aquele ε_{ijk} é o símbolo de Levi–Civita, caso alguém ainda não conheça.)

. . . .

2. Considere a função geradora das funções de Bessel de ordem inteira:

$$\mathcal{G}(x,t) := e^{\frac{x}{2}(t-1/t)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} J_m(x)\,t^m\,.$$

Derivando $\mathcal{G}(x,t)$ parcialmente em relação a t, deduza a seguinte identidade:

$$J_{m+1}(x) + J_{m-1}(x) = \frac{2m}{x}J_m(x) \qquad (m\in\mathbb{Z})\,.$$

. . . .

3. A partir da definição da função de Bessel de ordem $\mu \quad (\mu \neq -1, -2, \ldots)$,

$$J_\mu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\mu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\mu},$$

mostre que:

a) $J_{-m}(x) := \lim_{\mu\to -m} J_\mu(x) = (-1)^m J_m(x) \quad (m\in\mathbb{N})\,;$

b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{-\mu}J_\mu(x)] = -x^{-\mu}J_{\mu+1}(x)\,, \qquad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{\mu}J_\mu(x)] = x^{\mu}J_{\mu-1}(x)\,;$

c) os resultados do item b) implicam

$$\begin{aligned} J_{\mu+1}(x) - J_{\mu-1}(x) &= -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}J_\mu(x)\,, \\ J_{\mu+1}(x) + J_{\mu-1}(x) &= \frac{2\mu}{x}J_\mu(x)\,. \end{aligned}$$

(Note que esta última equação generaliza o resultado obtido na questão 2.)

. . . .

4. (2,0 pt) Demonstre os resultados abaixo.

a) Lembrando que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (o que pode ser calculado diretamente da definição de $\Gamma(z)$) e que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, mostre, por indução, que

$$\Gamma(k+1/2) = \frac{(2k)!}{k!\,2^{2k}}\sqrt{\pi} \qquad (k \in \mathbb{N})\,.$$

b) Use o resultado acima para mostrar que $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$ e $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$.

c) Use uma das fórmulas obtidas na questão 3 para mostrar que $J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$.

....

5. (Desafio) Mostre que o Wronskiano de $J_\nu(x)$ e $J_{-\nu}(x)$ $\quad (\nu \notin \mathbb{Z})$ é igual a $-\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi x}$, usando o fato de que ambas as funções são soluções da equação de Bessel de ordem ν.
(Dica: da equação diferencial obtemos diretamente que $W(x) = c/x$, para alguma constante c (lembre-se de Métodos I). Para determinar esta constante, basta calcular o resíduo de $W(z) = J_\nu(z)J'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J'_\nu(z)$ no ponto $z = 0$ e usar a identidade $\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \pi/\sin(\nu\pi)$.)

....

6. (2ª prova de Métodos I – 2019/1, adaptada) Numa outra versão da "dinâmica do flerte", a variação do interesse de B em A é inversamente proporcional ao tempo, de modo que as equações que caracterizam o sistema, para $t > 0$, ficam:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{I}}_{\mathrm{A}} &= \mathcal{I}_{\mathrm{B}} \\ \dot{\mathcal{I}}_{\mathrm{B}} &= -\dfrac{1}{t}\mathcal{I}_{\mathrm{A}}\,. \end{cases}$$

a) Mostre que estas equações implicam

$$t\,\ddot{\mathcal{I}}_{\mathrm{B}} + \dot{\mathcal{I}}_{\mathrm{B}} + \mathcal{I}_{\mathrm{B}} = 0\,.$$

b) Mostre que $\mathcal{I}_{\mathrm{B}}(t) = J_0(2\sqrt{t})$ é solução desta equação. A partir desta solução, calcule $\mathcal{I}_{\mathrm{A}}(t)$.
(Este exercício ilustra o fato de que as funções de Bessel não aparecem apenas nas soluções da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas.)

....

7. (3,0 pt) Um capacitor infinito de "placas" semi-cilíndricas tem sua placa superior mantida a um potencial V_0 e sua placa inferior mantida a um potencial $-V_0$. Sabendo que o raio da seção transversal do capacitor é a e que o potencial é nulo a uma distância infinita do mesmo, encontre uma expressão aproximada para o campo elétrico $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ válida para pontos muito (mas não infinitamente!) distantes do capacitor. (Lembre-se de que V satisfaz a equação de Laplace.)