

Métodos da Física Teórica II – 2020/2
1ª lista de exercícios

1. Quando fazemos uso de métodos computacionais, é comum aproximarmos a derivada segunda de uma função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} , calculada num certo ponto x_0 , pela expressão

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2},$$

onde h é um pequeno passo escolhido de forma conveniente. Justifique essa aproximação com base na interpretação do operador laplaciano.

2. Considere a função de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R} definida por $f(\vec{r}) = a \operatorname{sech}^2(b|\vec{r}|)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

(Esta função pertence à família de potenciais de Pöschl–Teller, de interesse na Mecânica Quântica.)

a) Calcule o laplaciano de f no ponto $\vec{r} = \vec{0}$ pela fórmula $\nabla^2 f := \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$.
(Sugestão: use o laplaciano em coordenadas esféricas e tome o limite $|\vec{r}| \rightarrow 0$.)

b) Calcule o laplaciano de f no ponto $\vec{r} = \vec{0}$ pela fórmula

$$\nabla^2 f(\vec{r})|_{\vec{r}=\vec{0}} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{6}{\varepsilon^2} \left[\langle f(\vec{r}) \rangle|_{|\vec{r}|=\varepsilon} - f(\vec{0}) \right],$$

onde $\langle f(\vec{r}) \rangle|_{|\vec{r}|=\varepsilon}$ denota a média dos valores de f calculados nos pontos de \mathbb{R}^3 tais que $|\vec{r}| = \varepsilon$.

3. (1,0 pt) Duas barras delgadas idênticas, exceto pelo fato de que uma se encontra à temperatura 0 e a outra à temperatura $U > 0$, são postas em contato a partir da junção de suas extremidades. Supondo que só haja troca de calor entre as duas barras, i.e. que elas estejam termicamente isoladas do ambiente, encontre a função que descreve a temperatura de cada ponto do sistema formado pelas duas barras em um dado instante de tempo após o início da troca de calor. Se esperarmos um tempo longo o suficiente, qual será a temperatura final do conjunto? (Dica: lembre que, pela Lei de Fourier, o fluxo de calor é proporcional ao gradiente de temperatura; portanto, como não há troca de calor com o ambiente, a função procurada deve satisfazer condições de contorno de Neumann.)

4. Considere um tubo infinito (ou seja, muito mais longo do que a região que temos interesse em estudar) cheio de água pura. No instante $t = 0$, é inserida no tubo, através de um orifício na posição $x = x_0$, uma gota de corante azul de massa m . Pode-se mostrar, através da Lei de Fick, que a densidade linear de massa de corante na posição x e no instante $t > 0$, dada pela função $\rho(x, t)$, satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2},$$

onde σ é o coeficiente de difusão do corante. Como o tubo é suposto infinito, as condições de contorno para este problema são $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \rho(x, t) = 0$. Usando a delta de Dirac, escreva a condição inicial que representa a situação descrita e, então, encontre a função $\rho(x, t)$.

(Sugestão: use a transformada de Fourier.)

5. (2,0 pt) Foi encontrada uma barra metálica de comprimento L na região da antiga usina nuclear de Chernobyl. A barra foi posta em completo isolamento (em particular, térmico), mas a contaminação por substâncias radioativas está fazendo sua temperatura aumentar segundo a equação

$$\partial_t u(x, t) = \alpha \nabla^2 u(x, t) + \beta \sin(\pi x/L) e^{-\lambda t},$$

onde α , β e λ são constantes positivas. Encontre $u(x, t)$ sabendo que no instante $t = 0$ a temperatura em toda a barra era zero (em alguma escala).

6. (2,0 pt) Uma barra delgada de comprimento L , densidade ρ , calor específico c e condutividade térmica κ tem uma de suas extremidades presa a um enorme bloco de gelo que está derretendo, de modo que, após esperarmos um tempo suficientemente longo, a barra inteira se encontra a 0°C . Neste instante, a outra extremidade da barra (digamos, $x = 0$) passa a ser iluminada com luz laser, que lhe fornece uma potência por unidade de área constante e igual a q . Supondo que toda a potência recebida do laser seja convertida em energia térmica, encontre a função que descreve a temperatura de cada ponto da barra em um dado instante de tempo após o início da incidência da luz laser. Se esperarmos um tempo bastante longo, qual será a temperatura no ponto mais quente da barra? Que ponto é esse? (Dica: lembre-se da Lei de Fourier ($\vec{q} = -\kappa \vec{\nabla} u$) e tenha cuidado ao estender o domínio da função que dá a condição inicial. Que simetrias a função estendida deve ter?)

7. (Desafio) O solo de uma região próxima à antiga usina nuclear de Chernobyl está contaminado com uma substância radioativa de constante de desintegração λ . Devido a isto, o gás radioativo se difunde na atmosfera de modo que μ unidades de massa por unidade de área do solo penetram no ar por unidade de tempo. Considere tanto o solo (plano) quanto a atmosfera como meios semi-infinitos, sendo $x = 0$ a fronteira entre os dois. Por simetria, a densidade de gás radioativo na atmosfera ρ só pode depender da altura $x > 0$ e do tempo t .

a) Entenda por que a situação descrita acima é governada pelas equações

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} - \lambda \rho(x, t), \quad \frac{\partial \rho}{\partial x}(0, t) = -\mu,$$

onde σ é o coeficiente de difusão do gás.

b) Encontre a relação entre a densidade de gás e a altura após um tempo suficientemente longo.

c) Supondo $\rho(x, 0) = 0$ para $x \geq 0$, use a transformada de Fourier para mostrar que

$$\rho(x, t) = \frac{2\mu\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-(\sigma k^2 + \lambda)t}}{\sigma k^2 + \lambda} \cos(kx) dk.$$

d) Supondo $\rho(x, 0) = 0$ para $x \geq 0$, use a transformada de Laplace para mostrar que

$$\rho(x, t) = \mu \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\lambda\tau} e^{-x^2/(4\sigma\tau)} d\tau.$$

e) Mostre que os resultados dos itens c) e d) são equivalentes.

(Sugestão: use $\frac{1 - e^{-(\sigma k^2 + \lambda)t}}{\sigma k^2 + \lambda} = \int_0^t e^{-(\sigma k^2 + \lambda)\tau} d\tau$.)