

Métodos da Física Teórica I – 2021/1
5ª lista de exercícios

1. (Física 1) Imagine que N cartas idênticas, de comprimento $2L$, estão empilhadas sobre uma mesa.
- a) Mostre que o deslocamento máximo que a carta que está no topo pode sofrer, no sentido do seu comprimento, sem cair é dado por L .
- b) Mostre que, quando a primeira carta está na situação de deslocamento máximo, o deslocamento máximo que o conjunto da primeira e segunda cartas pode sofrer sem cair é dado por $L/2$.
- c) Mostre que, seguindo esse procedimento, a N -ésima carta terá um deslocamento máximo de L/N . Assim, após deslocar N cartas o máximo possível, o deslocamento horizontal total da primeira carta será

$$\sum_{n=1}^N \frac{L}{n}.$$

Curiosidades: como o limite quando $N \rightarrow \infty$ da soma acima diverge (série harmônica), é possível em princípio chegar tão longe quanto se queira com a carta do topo, desde que haja baralhos o suficiente... Para um trilhão de cartas ($N = 10^{12}$), a primeira carta terá se deslocado cerca de $28L$, ou seja, 14 cartas para o lado. Mas a altura da pilha seria da ordem da distância da Terra à Lua!

2. (Desafio) Calcule $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^5 + a^5}$, $a > 0$.

Dica: encontre um contorno que seja a borda de um setor circular de raio R de modo a aproveitar o fato de que $(x e^{2\pi i/5})^5 = x^5$.

3. (Desafio) Em Ótica, mais precisamente na teoria da difração, as seguintes integrais, conhecidas como integrais de Fresnel, são bastante importantes:

$$C := \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx, \quad S := \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx.$$

Calcule C e S . Dica: use um contorno que seja a borda de um setor que corresponda a um oitavo de um círculo de raio R . Além disso, use o fato conhecido de que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$.

4. Calcule:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{2+x^2} dx$, b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)} dx$, c) $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^3} dx$, d) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$.

Dica para o item c): a integral em questão está relacionada com a integral de $(\log z)^2/(1+z^3)$ sobre um contorno adequado. Note que você também vai obter o resultado de $\int_0^{\infty} dx/(1+x^3)$ como um subproduto.

5. (Desafio) a) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$, para $a > 0$. b) A partir do seu resultado, calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.