Métodos da Física Teórica I – 2019/1
8ª lista de exercícios

1. Considere a seguinte série de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \right].$$

a) Qual o período de f ?

b) Demonstre o teorema de Parseval na seguinte forma (supondo $f(x) \in \mathbb{R}$):

$$\left\langle [f(x)]^2 \right\rangle = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right),$$

onde $\langle \xi \rangle$ denota a média de ξ sobre um período.

. . . .

2. a) Seja $f(t) = t, \quad (0 < t < T)$. Escreva uma série de Fourier que represente uma extensão periódica de f com período T. (Esta função é conhecida como dente de serra.)

b) Use o resultado do item anterior para mostrar que

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots\right).$$

c) Use o teorema de Parseval, na forma demonstrada na questão anterior, para calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

. . . .

3. Expanda $\delta(x)$ (delta de Dirac) em uma série de Fourier complexa com período 2π.

. . . .

4. a) Expanda $f(x) = \theta(x), \quad (0 < |x| < \pi)$, em uma série de Fourier complexa com período 2π. ($\theta(x)$ é a função degrau de Heaviside.)

b) Use a fórmula de Euler ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$) para mostrar que o resultado é equivalente ao que obtivemos em aula para a onda quadrada.

. . . .

5. (Mario) Suponha que o Mario salte da posição $\vec{r}_0 = \vec{0}$ com velocidade $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$, e que no instante $t = t_0$ ele atinja uma plataforma que lhe forneça um impulso $\vec{I}$ vertical para cima, sendo $v_{0x}, v_{0y}, t_0 > 0$. A segunda lei de Newton para a componente vertical do vetor posição fica

$$m\ddot{y} = -mg + I\,\delta(t - t_0),$$

onde m é a massa do Mario. Encontre $y(t)$.