**Métodos da Física Teórica I – 2019/1**
**8ª lista de exercícios – respostas**

1. a) $f(x+2L) = f(x)$; logo, $f$ tem período $2L$.

b) Definindo um produto interno no espaço das funções reais de período $2L$ como

$$g \bullet h := \int_{x_0}^{x_0+2L} g(x)h(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

sendo $x_0$ uma constante real qualquer, temos:

$$\begin{aligned} 1 \bullet 1 &= 2L\,, \\ \cos(m\pi x/L) \bullet \cos(n\pi x/L) = \sin(m\pi x/L) \bullet \sin(n\pi x/L) &= L\,\delta_{mn}\,, \\ 1 \bullet \cos(n\pi x/L) = 1 \bullet \sin(n\pi x/L) = \cos(m\pi x/L) \bullet \sin(n\pi x/L) &= 0\,, \end{aligned}$$

onde $m, n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Assim, calculando o produto interno de $f$ consigo mesma, usando as equações acima e a linearidade de $\bullet$, obtemos

$$f \bullet f = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 2L + L \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \overset{!}{=} \int_{x_0}^{x_0+2L} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \equiv 2L\,\langle [f(x)]^2 \rangle\,.$$

Dividindo a equação acima pelo período $2L$, ficamos com o resultado desejado.
(Note que, apesar de a escolha $x_0 = -L$ ser mais conveniente em alguns casos, ela não é necessária. Eu fiz questão de deixar este fato explícito aqui e em outros exercícios da lista.)

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

2. a) $f(t) = \dfrac{T}{2} - \dfrac{T}{\pi}\left[\sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right) + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{4\pi t}{T}\right) + \dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{6\pi t}{T}\right) + \cdots\right]$.

b) Basta calcular $f(T/4)$, que, pelo teorema de Dirichlet, converge para $T/4$.

c) $\pi^2/6$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

3. $\delta(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}$.

(Note a semelhança com o caso contínuo. Esta representação é importante na quantização de alguns sistemas.)

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

4. a) $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, com $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_n = \frac{1}{in\pi}$ para $n$ ímpar, e $c_n = 0$ para os demais casos.

b) Juntando os termos proporcionais a $e^{inx}$ com aqueles proporcionais a $e^{-inx}$, $n = 1, 3, 5, \ldots$, obtemos

$$\frac{1}{in\pi}e^{inx} - \frac{1}{in\pi}e^{-inx} = \frac{2}{n\pi}\frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) = \frac{2}{n\pi}\sin(nx)\,;$$

portanto, o resultado é equivalente ao que obtivemos em aula usando a série de Fourier em termos de senos e cossenos.

.........................................................................................................

5. $y(t) = v_{0y}t - \dfrac{1}{2}gt^2 + \dfrac{I}{m}(t - t_0)\,\theta(t - t_0)\,.$

(Esboce o gráfico de $y(t)$ contra $t$ para $t \geq 0$ pra ver que esta solução faz sentido.)