Métodos da Física Teórica I – 2019/1
7ª lista de exercícios – respostas

1. a) $x(t) = x_0 \left(1 + \frac{b}{2m} t\right) e^{-\frac{b}{2m}t}$.

b) Definindo novamente $\omega := qB/m$, você deve encontrar $z(t) = z_0 + v_{0z}t$,

$$x(t) = x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} + \frac{v_{0x}}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t) - \frac{v_{0y}}{\omega}\cos(\omega t)\,,$$

$$y(t) = y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega} + \frac{v_{0y}}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t) + \frac{v_{0x}}{\omega}\cos(\omega t)\,,$$

que são soluções perfeitamente aceitáveis. Mas, para fazer conexão com a solução anterior (cf. respostas da 6ª lista) e facilitar a interpretação do resultado, podemos definir $R := \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}/|\omega|$ e um ângulo δ tal que $R\operatorname{sen}\delta = v_{0x}/\omega$ e $R\cos\delta = -v_{0y}/\omega$, de modo que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & R\cos(-\omega t + \delta) + x_0 + v_{0y}/\omega \\ y(t) & = & R\operatorname{sen}(-\omega t + \delta) + y_0 - v_{0x}/\omega \\ z(t) & = & z_0 + v_{0z}t\,, \end{array}\right.$$

onde agora ficam claras as relações entre as constantes que aparecem na solução anterior e as condições iniciais. Por exemplo, $R \neq 0$ exceto quando $v_{0x} = v_{0y} = 0$.

c) Na busca por soluções de equações diferenciais do tipo $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, a transformada de Laplace só é útil quando os coeficientes $p(x)$ e $q(x)$ são constantes. Portanto, ela não ajuda na resolução das questões $2, 3, \ldots, 6$ da 6ª lista.

. . . .

2. a) $\dfrac{s}{s^2 + a^2} \quad (\operatorname{Re} s > 0)\,,$ b) $\dfrac{a}{s^2 + a^2} \quad (\operatorname{Re} s > 0)\,,$

c) $\dfrac{\Gamma(3)}{(s+1)^3} = \dfrac{2!}{(s+1)^3} \quad (\operatorname{Re} s > -1)\,,$ d) $\dfrac{\Gamma(\frac{3}{2})}{(s-a)^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2(s-a)^{3/2}} \quad (\operatorname{Re} s > a)\,.$

. . . .

3. As respostas são as funções de t que aparecem na questão 2, obviamente.
Usar a fórmula para obter as inversas de $s/(s^2 + a^2)$, $1/(s^2 + a^2)$ ou $1/(s + 1)^3$ não deveria ser difícil.
Para $(s - a)^{-3/2}$, porém, é um desafio considerável, e é normal que estudantes não consigam fazer.

Eu o coloquei na lista por dois motivos. Primeiro, para ilustrar o fato de que às vezes calcular a transformada de uma função é muito mais simples do que calcular a inversa, de modo que em alguns casos é mais fácil lembrar a função original do que depender daquela fórmula de inversão. Segundo, porque este cálculo tem a ver com uma regularização de infinitos, ou seja, uma maneira de tirar um resultado finito, que faça sentido, de uma expressão que aparentemente divergiria. Este tipo de método é usado com frequência em Teoria Quântica de Campos, que é a base do chamado Modelo Padrão das Partículas Elementares, dentre várias outras aplicações.

. . . .

4. Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da equação, ficamos com

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + \omega^2 X(s) = \mathrm{L}[f(t)]$$

$$\implies X(s) = x_0 \frac{s}{s^2+\omega^2} + v_0 \frac{1}{s^2+\omega^2} + \frac{1}{s^2+\omega^2}\mathrm{L}[f(t)]$$

$$= \mathrm{L}\left[x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)\right] + \mathrm{L}\left[\frac{1}{\omega}\mathrm{sen}(\omega t)\right]\mathrm{L}[f(t)]\,.$$

Portanto, usando o teorema da convolução,

$$x(t) = \mathrm{L}^{-1}[X(s)] = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{1}{\omega}\int_0^t \mathrm{sen}[\omega(t-\tau)]\, f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

....

5. $y(x) = x, \qquad z(x) = e^x.$

....

6. Você deve encontrar $z(t) = z_0 + v_{0z}t$,

$$x(t) = x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} + \frac{E}{B}t + \frac{v_{0x} - E/B}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t) - \frac{v_{0y}}{\omega}\cos(\omega t)\,,$$

$$y(t) = y_0 - \frac{v_{0x} - E/B}{\omega} + \frac{v_{0y}}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{v_{0x} - E/B}{\omega}\cos(\omega t)\,,$$

lembrando que $\omega := qB/m$. Que tipo de movimento representam estas equações? Para simplificar, vamos supor que $v_{0z} = 0$ e, portanto, o movimento se dá no plano $z = z_0$ (o movimento geral para $v_{0z} \neq 0$ será uma superposição do movimento neste plano com um movimento retilíneo uniforme na direção de $\vec{B}$). Note que podemos escrever

$$(x(t) - \mathsf{c}_x(t))^2 + (y(t) - \mathsf{c}_y)^2 = R^2\,,$$

onde $\mathsf{c}_x(t) := x_0 + v_{0y}/\omega + (E/B)t, \quad \mathsf{c}_y := y_0 - (v_{0x} - E/B)/\omega \quad$ e $R := \dfrac{1}{|\omega|}\sqrt{\left(v_{0x} - \dfrac{E}{B}\right)^2 + v_{0y}^2}\,.$

Assim, é intuitivo pensar neste movimento como um movimento circular uniforme de raio R e cujo centro se desloca em movimento retilíneo uniforme no sentido de x crescente, com velocidade E/B. A trajetória descrita é, em geral, uma cicloide, que pode ser de três tipos:

- comum, se $|\omega|R = E/B$, i.e. se as condições iniciais forem tais que $v_{0y}^2 = v_{0x}(2E/B - v_{0x})$;
- encurtada, se $|\omega|R < E/B$, i.e. se as condições iniciais forem tais que $v_{0y}^2 < v_{0x}(2E/B - v_{0x})$;
- alongada, se $|\omega|R > E/B$, i.e. se as condições iniciais forem tais que $v_{0y}^2 > v_{0x}(2E/B - v_{0x})$.

Uma forma alternativa de chegar a esta conclusão é definir um ângulo ϕ tal que $R\,\mathrm{sen}\,\phi = v_{0y}/\omega$ e $R\cos\phi = -(v_{0x} - E/B)/\omega$. Fazendo isto, podemos reescrever a solução do problema como

$$x(t) = x_0 + \frac{v_{0y}}{\omega} + \frac{E}{\omega B}\,\omega t - R\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)\,,$$
$$y(t) = y_0 - \frac{v_{0x}}{\omega} + \frac{E}{\omega B} - R\cos(\omega t + \phi)\,,$$

que podem ser reconhecidas como as equações paramétricas da cicloide (generalizada).
Eu recomendo que quem tiver interesse pesquise mais sobre a cicloide na internet. Por exemplo, no Wolfram tem umas animações explicativas (`http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html`).

Por fim, é interessante notar o que acontece quando $v_{0y} = 0$ e $v_{0x} = E/B$. Neste caso, as forças elétrica e magnética se equilibram perfeitamente, e a partícula executa um movimento retilíneo uniforme. De fato, as equações paramétricas acima degeneram nas de uma reta:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & x_0 + (E/B)t \\ y(t) & = & y_0 \\ z(t) & = & z_0 + v_{0z}t\,. \end{array} \right.$$