Métodos da Física Teórica I – 2019/1
6ª lista de exercícios

1. Ao aplicar a 2ª lei de Newton ao movimento de uma partícula, foi encontrada a seguinte equação:

$$m\ddot{x}(t) = -b\dot{x}(t) - kx(t)\,,$$

onde um ponto denota uma derivada em relação a t e m, b, k são constantes reais tais que $b^2 = 4km$.

a) Encontre uma solução desta equação da forma $x_1(t) = e^{\lambda t}$, com λ constante.

b) A partir de $x_1(t)$, encontre outra solução, linearmente independente, com auxílio do Wronskiano.

c) Utilize o método da variação das constantes para encontrar a outra solução. (Ou seja, substitua na equação diferencial a expressão $x_2(t) = \alpha(t)\,x_1(t)$ e então encontre a função $\alpha(t)$. Naturalmente, $x_2(t)$ deve ser igual à solução encontrada no item anterior.)

d) A partir das condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$, encontre $x(t)$.

. . . .

2. Considere a equação $x^2y'' - 2y = 0$.

a) Procure uma solução da forma $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

b) Utilizando o método da sua preferência, encontre uma outra solução a partir de $y_1(x)$.

c) Mostre que, buscando uma solução da forma $y_{\mathrm{T}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$, é possível encontrar a solução geral da equação acima. (Este item é mais para a sua diversão. Este método de solução não costuma ser usado. Dica: expanda x^2 em série de Taylor em torno de $x = 1$.)

d) Encontre a solução geral de $x^2y'' - 2y = x^3\cos(x)$.
(Você pode usar que $\int x^3\cos(x)\,\mathrm{d}x = x(x^2-6)\,\mathrm{sen}(x) + 3(x^2-2)\cos(x)$.)

. . . .

3. O estado fundamental (estado de menor energia) do oscilador harmônico quântico é caracterizado por uma equação do tipo:

$$\psi'' + (1 - x^2)\psi = 0\,.$$

Utilizando o método de Frobenius, mostre que $\psi_1(x) = \exp\left(-x^2/2\right)$ é solução desta equação.
(A outra solução linearmente independente não faz sentido físico e é descartada, uma vez que $\lim_{x\to\pm\infty}\psi_2(x) = \infty$.)

4. Note que a equação $x^2y'' + xy' - y = 0$ possui a solução $y_1(x) = x$. Usando o método da variação das constantes, encontre uma segunda solução e resolva $x^2y'' + xy' - y = 1/(1-x)$.

. . . .

5. Mostre que a equação diferencial $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$ possui soluções polinomiais se λ é um inteiro não negativo. Calcule esses polinômios para $\lambda \leq 4$, normalizando-os pela condição $y(0) = 1$.

. . . .

6. Use o método de Frobenius para resolver a equação diferencial

$$(x^4 + 2x^2)y'' + 3xy' - 6x^2y = 0\,.$$

Escreva os cinco primeiros termos de cada série obtida. Quais os raios de convergência das séries?

. . . .

7. (Mecânica Clássica) Uma partícula de massa m e carga q se movimenta na presença de um campo magnético $\vec{B}$ constante e uniforme.

a) Utilizando coordenadas cartesianas (x, y, z) e escolhendo o eixo $\overrightarrow{\mathcal{OZ}}$ paralelo a $\vec{B}$, mostre que a 2^a lei de Newton leva às seguintes equações de movimento:

$$\left\{\begin{array}{lcl} m\ddot{x} & = & qB\,\dot{y} \\ m\ddot{y} & = & -qB\,\dot{x} \\ m\ddot{z} & = & 0\,. \end{array}\right.$$

Dica: lembre-se de que a força magnética é dada por $\vec{\mathcal{F}}_{\mathrm{m}} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$.

b) Resolva o sistema de equações acima e descreva o movimento da partícula.
Dica: A equação para $z(t)$ é obviamente trivial. Encontrar as expressões para $x(t)$ e $y(t)$ significa resolver um sistema de equações diferenciais acopladas. Uma maneira para fazer isto seria derivar, por exemplo, a primeira equação em relação a t e então substituir a segunda equação, obtendo uma equação de terceira ordem para $x(t)$.
Existe, porém, uma maneira mais elegante de resolver o problema. Para tanto, defina uma variável complexa $w := x + iy$, de modo que $x = \mathrm{Re}\,w$ e $y = \mathrm{Im}\,w$. Derivando w duas vezes em relação a t e substituindo as equações para $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$, você deve obter uma equação de segunda ordem simples para $w(t)$.