**Métodos da Física Teórica I – 2019/1**
**6ª lista de exercícios – respostas**

1. a) $x_1(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}$.

b) $x_2(t) = t\, e^{-\frac{b}{2m}t}$.

c) $\alpha(t) = t$.

d) $x(t) = x_0 \left(1 + \frac{b}{2m}t\right) e^{-\frac{b}{2m}t}$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

2. a) $y_1(x) = c_2 x^2$.

b) $y_2(x) = 1/x$.

c) O primeiro passo é escrever $x^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$, que é a série de Taylor de $x^2$ em torno de $x = 1$, e substituir este resultado na equação diferencial para $y(x)$. Buscando, então, uma solução da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$, obtemos as seguintes equações para os coeficientes:

$$\begin{cases} 2a_2 - 2a_0 = 0 \\ 6a_3 + 4a_2 - 2a_1 = 0 \\ a_{n+2} = -\dfrac{2n}{n+2} a_{n+1} - \dfrac{n(n-1) - 2}{(n+1)(n+2)} a_n \qquad (n \geq 2)\,, \end{cases}$$

onde $a_0$ e $a_1$ são constantes arbitrárias. Estas equações implicam $a_2 = a_0$, $a_3 = (a_1 - 2a_0)/3$ e $a_n = (-1)^{n+1} a_3 \quad (n \geq 4)$. Portanto, a solução geral pode ser escrita como

$$y(x) = a_0 \left[ 1 + (x-1)^2 - \frac{2}{3}(x-1)^3 + \frac{2}{3}(x-1)^4 - \frac{2}{3}(x-1)^5 + \cdots \right]$$
$$+ a_1 \left[ (x-1) + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{3}(x-1)^4 + \frac{1}{3}(x-1)^5 - \cdots \right].$$

Note que, se escolhemos $a_1 = 2a_0$, obtemos $y_1(x) = a_0 x^2$; por outro lado, se escolhemos $a_1 = -a_0$, obtemos a série de Taylor de $y_2(x) = a_0/x$ em torno de $x = 1$. Naturalmente, a solução geral é uma combinação linear de $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

d) $y(x) = \alpha\, x^2 + \beta/x + 2\,\mathrm{sen}(x) - (x^2 - 2)\cos(x)/x, \qquad$ sendo $\alpha, \beta$ constantes arbitrárias.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

3. Procurando uma solução do tipo Frobenius, i.e. $\psi_{\mathrm{T}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+s}$, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{cases} s(s-1) &= 0 \\ (s+1)s\,c_1 &= 0 \\ c_n &= -\dfrac{c_{n-2}}{n(n-1)} \qquad (n = 2 \text{ ou } 3) \\ c_n &= \dfrac{c_{n-4} - c_{n-2}}{n(n-1)} \qquad (n \geq 4)\,. \end{cases}$$

Como a solução que buscamos é uma função par, podemos escolher $s = 0$ e $c_1 = 0$. Assim, obtemos a série

$$\psi_1(x) = c_0 \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - \frac{1}{6}\frac{x^6}{8} + \cdots \right).$$

Por inspeção, podemos supor que o coeficiente de $x^{2k}$ é dado pela fórmula

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!} \left( \frac{1}{2} \right)^k c_0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Podemos, então, verificar a validade deste resultado através da indução matemática, ou seja, podemos mostrar que se a equação acima é válida para $k$ e $k-1$, então ela também vale para $k+1$. Com efeito,

$$c_{2(k+1)} = \frac{c_{2k-2} - c_{2k}}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} \left[ \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{c_0}{2^{k-1}} - \frac{(-1)^k}{k!} \frac{c_0}{2^k} \right] = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \left( \frac{1}{2} \right)^{k+1} c_0\,.$$

Finalmente, concluímos que

$$\psi_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left( \frac{1}{2} \right)^k x^{2k} \stackrel{!}{=} c_0 \exp\left( -x^2/2 \right)$$

é uma solução da equação diferencial estudada.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

4. $y_2(x) = 1/x$. $\qquad y(x) = \alpha\, x + \beta/x - \dfrac{1}{2} - x \ln \sqrt{\left| \dfrac{1-x}{x} \right|} + \dfrac{1}{x} \ln \sqrt{|1-x|}$, $\qquad$ com $\alpha, \beta$ constantes.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

5. $P_0(x) = 1\,,$

$P_1(x) = 1 - x\,,$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(2 - 4x + x^2)\,,$

$P_3(x) = \frac{1}{6}(6 - 18x + 9x^2 - x^3)\,,$

$P_4(x) = \frac{1}{24}(24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4)\,.$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

6.

$$y_1(x) = 1 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{15}x^4 - \frac{1}{195}x^6 + \frac{1}{1105}x^8 - \cdots \,,$$

$$y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 + \frac{7}{8}x^2 + \frac{21}{128}x^4 - \frac{7}{1024}x^6 + \frac{35}{32768}x^8 - \cdots\right).$$

As séries convergem para $|x| < \sqrt{2}$ (e $x \neq 0$ no caso de $y_2(x)$). Isto pode ser obtido através do teste da razão, e é o resultado esperado uma vez que, escrevendo a equação diferencial estudada na forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, é fácil ver que $p(x)$ e $q(x)$ possuem singularidades em $x = 0$ e $\pm i\sqrt{2}$.
(É interessante notar que este é mais um exemplo em que, mesmo as singularidades aparecendo no eixo imaginário, seus efeitos são sentidos na reta real.)

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

7. b)

$$\begin{cases} x(t) &= R\cos(-\omega t + \delta) + \mathsf{c}_x \\ y(t) &= R\,\mathrm{sen}(-\omega t + \delta) + \mathsf{c}_y \\ z(t) &= z_0 + v_{0z}t\,, \end{cases}$$

onde $\omega := qB/m$ e $R, \delta, \mathsf{c}_x, \mathsf{c}_y, z_0, v_{0z}$ são constantes que dependem das condições iniciais. Como

$$(x(t) - \mathsf{c}_x)^2 + (y(t) - \mathsf{c}_y)^2 = R^2\,,$$

temos que, se $v_{0z} = 0$, então a partícula descreve um movimento circular uniforme (supondo $R \neq 0$, que é o caso interessante) no plano $z = z_0$ com velocidade angular $\omega$, raio $R$ e centro em $(\mathsf{c}_x, \mathsf{c}_y, z_0)$. O movimento tem sentido horário se $q > 0$, e anti-horário se $q < 0$ (visto da posição $(\mathsf{c}_x, \mathsf{c}_y, z_\star)$, com $z_\star > z_0$).

Se $v_{0z} \neq 0$, então o movimento da partícula é a superposição daquele movimento circular com um movimento retilíneo uniforme na direção de $\vec{B}$, cujo resultado é uma trajetória helicoidal de passo $2\pi v_{0z}/\omega$.