Métodos da Física Teórica I – 2020/4
5ª lista de exercícios

1. (Física 1) Imagine que N cartas idênticas, de comprimento $2L$, estão empilhadas sobre uma mesa.
a) Mostre que o deslocamento máximo que a carta que está no topo pode sofrer, no sentido do seu comprimento, sem cair é dado por L.
b) Mostre que, quando a primeira carta está na situação de deslocamento máximo, o deslocamento máximo que o conjunto da primeira e segunda cartas pode sofrer sem cair é dado por $L/2$.
c) Mostre que, seguindo esse procedimento, a N-ésima carta terá um deslocamento máximo de L/N. Assim, após deslocar N cartas o máximo possível, o deslocamento horizontal total da primeira carta será

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{L}{n}\,.$$

Curiosidades: como o limite quando $N \to \infty$ da soma acima diverge (série harmônica), é possível em princípio chegar tão longe quanto se queira com a carta do topo, desde que haja baralhos o suficiente... Para um trilhão de cartas ($N = 10^{12}$), a primeira carta terá se deslocado cerca de $28L$, ou seja, 14 cartas para o lado. Mas a altura da pilha seria da ordem da distância da Terra à Lua!

2. (Desafio) Calcule $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^5 + a^5}$, $\qquad a > 0$.

Dica: encontre um contorno que seja a borda de um setor circular de raio R de modo a aproveitar o fato de que $\left(x\, e^{2\pi i/5}\right)^5 = x^5$.

3. (Desafio) Em Ótica, mais precisamente na teoria da difração, as seguintes integrais, conhecidas como integrais de Fresnel, são bastante importantes:

$$C := \int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x\,, \qquad S := \int_0^\infty \mathrm{sen}(x^2)\,\mathrm{d}x\,.$$

Calcule C e S. Dica: use um contorno que seja a borda de um setor que corresponda a um oitavo de um círculo de raio R. Além disso, use o fato conhecido de que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$.

4. Calcule:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x}{2 + x^2}\,\mathrm{d}x\,,$ $\qquad$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\, x}{x(1 + x^2)}\,\mathrm{d}x\,,$ $\qquad$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1 + x^3}\,\mathrm{d}x\,,$ $\qquad$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x\,.$

Dica para o item c): a integral em questão está relacionada com a integral de $(\log z)^2/(1 + z^3)$ sobre um contorno adequado. Note que você também vai obter o resultado de $\int_0^\infty \mathrm{d}x/(1 + x^3)$ como um subproduto.