Métodos da Física Teórica I – 2020/4
4ª lista de exercícios

1. Em Teoria de Cordas, frequentemente encontramos problemas cuja solução é simplificada através do uso de variáveis complexas. Por exemplo, no espalhamento de uma corda fechada e duas abertas (que poderia representar a absorção de um gráviton por um fóton, ou seja, a interação da luz com o campo gravitacional), aparece a integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{|x-a|^2}{|x-z_0|^4} \, ,$$

onde $a \in \mathbb{R}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$, com $\mathrm{Im}(z_0) > 0$. Calcule I em função de a e z_0. Dica: lembre que $|z|^2 = z\bar{z}$.

3. Calcule as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} \, ,$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\mathrm{sen}^2\,\theta} \, ,$ c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n\theta \, \mathrm{d}\theta \, .$

Dica para o item b): note que o integrando é uma função par de θ, ou seja, substituir θ por $-\theta$ no integrando não muda nada; portanto, você pode substituir $\int_0^{\pi}$ por $\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}$.

4. a) Mostre que, se uma função f pode ser escrita como $f(z) = g(z)/h(z)$, onde g e h são analíticas no ponto $z = z_0$, com $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$, então f possui um polo simples em $z = z_0$, com resíduo dado por $g(z_0)/h'(z_0)$. (Note que isto se aplica à função cotangente.)

b) Use este resultado para calcular a seguinte integral:

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{4\cosh z - 5} \mathrm{d}z \, .$$

5. Escolha um ramo de $\log(1+z)$ que seja analítico em $z = 0$ e, então, expanda a função em série de Taylor em torno daquele ponto, indicando a região em que a expansão é válida, ou seja, onde a série converge.

6. (Desafio) Mostre que, na expansão de $(e^z - 1)^{-1}$ em série de Laurent na vizinhança de $z = 0$, o coeficiente c_2 é igual a zero. Dica: não é preciso obter a série de Laurent inteira para mostrar isto.

7. Determine os pontos em que as seguintes funções não são analíticas. Se as singularidades forem isoladas, determine seu tipo (se for um polo, diga a ordem) e calcule os respectivos resíduos:

a) $\displaystyle\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)} \, ,$ b) $\displaystyle\frac{1-e^{2z}}{z^4} \, ,$ c) $\displaystyle\frac{z}{\cos z} \, ,$ d) $\tanh z \, ,$ e) $\displaystyle\mathrm{sen}\left(\frac{1}{1-z}\right) .$

8. Represente a função $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$ por meio de uma série de Laurent em torno de $z = 1$ que convirja para $f(z)$ quando $0 < |z-1| < 2$.