Métodos da Física Teórica I – 2020/4
4ª lista de exercícios – respostas

1. $I = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{|z_0 - a|^2}{\mathrm{Im}(z_0)^3}\,.$

. . . .

3.

a) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\,,$ b) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\,,$ c) $\dfrac{\pi}{2^{n-1}}\dfrac{n!}{(n/2)!(n/2)!}\,,$ para n par; se n for ímpar, dá zero.

. . . .

4. a) A maneira mais simples é usar o teste do polo simples, ou seja, calcular o seguinte limite:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{\left(\frac{h(z)}{z-z_0}\right)} = \lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{\left(\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}\right)},$$

onde usamos o fato de que $h(z_0) = 0$ para incluí-lo na expressão sem alterar o resultado. Como

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = g(z_0) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{z\to z_0}\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0} \equiv h'(z_0) \neq 0\,,$$

temos que $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = g(z_0)/h'(z_0)$, que é um número complexo (finito) e diferente de zero. Portanto, a função $f(z)$ de fato possui um polo simples em $z = z_0$, com resíduo dado por $g(z_0)/h'(z_0)$.

b) $5\pi i/2$.

. . . .

5. Escolhendo, por exemplo, o ramo $\log(1+z) = \ln|1+z| + i\arg(1+z)$, com $-\pi < \arg(1+z) < \pi$, podemos expandir $\log(1+z)$ em série de Maclaurin, uma vez que este ramo é analítico em $z = 0$. O resultado obtido é

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}\,,$$

que converge se $|z| < 1$. Experimente derivar os dois lados da equação acima em relação a z. Você deve obter algo familiar...

. . . .

6. Usando a definição da função exponencial, $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$, obtemos

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\cdots} = \frac{1}{z\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{6}+\cdots\right)} = \frac{z^{-1}}{1-\left(-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{6}-\cdots\right)}$$

$$= z^{-1}\left[1+\left(-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{6}-\frac{z^3}{24}-\cdots\right)+\left(-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{6}-\cdots\right)^2+\left(-\frac{z}{2}-\cdots\right)^3+\cdots\right],$$

onde dentro dos colchetes escrevemos apenas os termos que dão origem a potências z^3, porque são estas as que vão gerar o termo $c_2 z^2$ depois de multiplicar o z^{-1} fora dos colchetes.
Juntando todas as contribuições, ficamos com

$$\frac{1}{e^z-1} = z^{-1}\left[-\frac{z^3}{24}+\left(-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{6}\right)^2+\left(-\frac{z}{2}\right)^3\right]+\cdots = z^2\left[-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right]+\cdots = 0+\cdots,$$

ou seja, $c_2 = 0$.

....

7. a) Polo duplo em $z=-1$. $\operatorname{Res}_{z=-1} f(z) = -14/25$.
Polo simples em $z=\pm 2i$. $\operatorname{Res}_{z=\pm 2i} f(z) = (7\pm i)/25$.

b) Polo triplo em $z=0$. $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -4/3$.

c) Polos simples em $z=\pi/2+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$. $\operatorname{Res}_{z=\pi/2+n\pi} f(z) = (-1)^{n+1}(n+\frac{1}{2})\pi$.

d) Polos simples em $z=i(\pi/2+n\pi)$, $n\in\mathbb{Z}$. $\operatorname{Res}_{z=i(\pi/2+n\pi)} f(z) = 1$.

e) Singularidade essencial em $z=1$. $\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = -1$.

....

8. $f(z) = -\dfrac{1/2}{z-1} - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(z-1)^n}{2^{n+2}}$, $\quad 0<|z-1|<2$.

Note que o resíduo (coeficiente de $(z-1)^{-1}$) é dado por $c_{-1}=-1/2$, e que este mesmo resultado pode ser obtido através da fórmula que deduzimos em aula para o resíduo de um polo simples:

$$\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = -\frac{1}{2}.$$