Métodos da Física Teórica I – 2020/4
3ª lista de exercícios

1. Calcule $\displaystyle\int_1^i z\,\mathrm{d}z$ usando três caminhos diferentes:

a) Indo de 1 até $1+i$ por um segmento de reta vertical, e então seguindo de $1+i$ para i por um segmento de reta horizontal.
b) Indo diretamente de 1 para i através do segmento de reta que os conecta.
c) Percorrendo um arco de círculo de raio 1 e centro na origem, no sentido anti-horário.

O caminho escolhido alterou o resultado da integral? Isto era esperado?

2. Calcule $\displaystyle\int_1^i \frac{\mathrm{d}z}{z}$ usando dois caminhos distintos: primeiro, escolha um dos caminhos do exercício anterior; depois, percorrendo um arco de círculo de raio 1 e centro na origem, no sentido horário.
O caminho escolhido alterou o resultado da integral? Isto era esperado?

3. Seja $f(z) = \dfrac{z^3}{(z-1)(z^2+1)^2}$. Calcule $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} f(z)\,\mathrm{d}z$ quando $\mathcal{C}$ é o contorno definido por:

a) $z = \frac{1}{2}e^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$.
b) Um quadrado cujos vértices são os números complexos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ e seus conjugados.
c) $|z-i| = \frac{3}{4}$.
d) $z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} + e^{i\theta}, \quad -\pi \le \theta \le \pi$.

4. Calcule: a) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1+z}{z(2-z)}\mathrm{d}z$ e b) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^n}\mathrm{d}z\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$

5. Verifique se as séries abaixo convergem para $|z| \le 1$:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx + i\operatorname{sen} ny}{n^2}\,, \qquad (x = \operatorname{Re} z\,, \quad y = \operatorname{Im} z)\,.$$

(Dica para o item b) acima: você pode usar o fato de que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ é convergente. A demonstração deste fato fica como desafio para quem tiver interesse.)

6. (Desafio) Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ é divergente. (Esta série é conhecida como série harmônica.)

7. Encontre a série de Maclaurin (série de Taylor em torno de $z=0$) que representa a função $\operatorname{sen} z$.

8. Mostre que $\cos z = -\operatorname{sen}(z - \pi/2)$. Combinando este resultado com o do exercício anterior, expanda a função $\cos z$ em torno de $z = \pi/2$.

9. Mostre que $\displaystyle\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(z+1)^n, \qquad \text{para } |z+1| < 1.$