**Métodos da Física Teórica I – 2020/4**
**3ª lista de exercícios – respostas**

1. a) $-1$. b) $-1$. c) $-1$. O resultado é independente do caminho porque $f(z) = z$ é analítica em todo o plano complexo (finito).

2. Para qualquer um dos caminhos do exercício anterior, o valor da integral é $i\pi/2$. Para o caminho proposto neste exercício, a integral dá $-3i\pi/2$. É esperado que os valores não sejam iguais porque não é possível deformar nenhum dos caminhos anteriores até o novo caminho sem passar pela singularidade em $z = 0$. Além disso, é esperado que a diferença das integrais dê exatamente $2\pi i$, uma vez que tal diferença é equivalente ao calculo da integral de $1/z$ sobre um caminho fechado (e orientado positivamente) em torno de $z = 0$, que já mostramos de diversas maneiras que dá $2\pi i$.

3. a) $0$. b) $i\pi/2$. c) $\pi/2 - i\pi/4$. d) $\pi/2 + i\pi/4$.

4. a) $i\pi$. b) $0$, para $n$ ímpar; $2\pi i(-1)^{\frac{n}{2}-1}/(n-1)!$, para $n$ par.

5. a) Pelo teste da razão, esta série converge para qualquer $z$ tal que $\left|\dfrac{z-1}{3}\right| < 1$, ou seja, para $|z-1| < 3$. Esta região do plano complexo contém o disco definido por $|z| \le 1$.

b) Como $|\cos nx + i \operatorname{sen} ny| = \sqrt{\cos^2 nx + \operatorname{sen}^2 ny} \le \sqrt{2}$ para quaisquer $x, y$ reais e $n$ inteiro positivo (porque $0 \le \cos^2 \xi, \operatorname{sen}^2 \zeta \le 1$ para quaisquer $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$), temos que

$$\left|\frac{\cos nx + i \operatorname{sen} ny}{n^2}\right| \le \frac{\sqrt{2}}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Mas sabemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n^2}$ converge para $\pi^2\sqrt{2}/6$; portanto, pelo teorema de Weierstrass ("teste M"), a série original também é convergente.

6. Uma forma de mostrar isto é através do cálculo de $\int_1^\infty \frac{dn}{n}$, que também diverge e é menor que a soma da série harmônica. Vou falar sobre esta série na aula.

7. $\operatorname{sen} z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

8. Começando pelo lado direito da equação, temos

$$-\operatorname{sen}(z - \pi/2) = -\frac{e^{i(z-\pi/2)} - e^{-i(z-\pi/2)}}{2i} = -\frac{(-i)e^{iz} - ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z\,.$$

Portanto, $\cos z$ pode ser expandido em uma série de potências de $(z - \pi/2)$ usando o resultado do problema anterior:

$$\cos z = -\operatorname{sen}(z - \pi/2) = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z-\pi/2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(z-\pi/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Como, dados uma função e um ponto do plano complexo, a série de Taylor é única, a série acima é necessariamente a série de Taylor da função $\cos z$ em torno do ponto $z = \pi/2$, a mesma que se pode obter a partir das derivadas de $\cos z$ calculadas em $z = \pi/2$.

9. Sabemos que

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{-1+(z+1)} = \frac{1}{1-(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n\,, \qquad \text{para } |z+1| < 1\,.$$

Logo,

$$\frac{1}{z^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(1+(z+1)+\sum_{n=2}^{\infty}(z+1)^n\right) = 1+\sum_{n=2}^{\infty}n(z+1)^{n-1} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(z+1)^n\,,$$

para $|z+1| < 1$.