Métodos da Física Teórica I – 2019/1
2ª lista de exercícios

1. Mostre que as seguintes funções inversas podem ser escritas como:

$$\text{a)}\ \tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad \text{b)}\ \operatorname{sen}^{-1} z = -i\log[iz + (1-z^2)^{1/2}] \quad \text{(compare com } \operatorname{sen} z = 2\text{)}.$$

2. Utilizando o resultado do item a) acima, encontre os pontos de ramificação de $\tanh^{-1} z$ e escolha um corte de ramificação de modo a tornar os ramos da função contínuos (e analíticos) no domínio.

3. Escreva (todos os valores de) $(-i)^i$ na forma cartesiana. Note que são todos reais!

4. O movimento de uma partícula em um plano pode ser descrito através de um número complexo $z(t)$, denotando a posição da partícula em relação à origem do plano complexo no instante t.
Para $z(t) = R\,e^{i\omega t}$, $(R, \omega, t > 0)$:
a) Qual o movimento executado pela partícula?
b) Calcule o módulo da velocidade da partícula $\left(|v| = |\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}|\right)$.
c) Mostre que, para todo instante t, a aceleração aponta para a origem e tem módulo $|v|^2/R$ (aceleração centrípeta).

5. Considere um circuito elétrico RLC em série, composto por um indutor de indutância L, um resistor de resistência R e um capacitor de capacitância C, ligados a uma fonte de tensão variável que gera uma diferença de potencial no instante t dada por $V(t) = V_0\cos(\omega t)$, $(V_0, \omega > 0)$.
Sabendo que a corrente $I = I(t)$ obedece à equação diferencial

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I(t) = \frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t},$$

encontre as expressões da amplitude I_0 e da constante de fase ϕ (em função de R, L, C, V_0 e ω) de modo que $I(t) = I_0\cos(\omega t - \phi)$ seja uma solução. (Dica: $\widetilde{I}(t) := I_0\,e^{i(\omega t - \phi)} \;\Rightarrow\; I(t) = \operatorname{Re}\widetilde{I}(t)$.)
Para que valor da frequência angular ω temos a amplitude máxima (frequência de ressonância)?

6. Calcule $f'(z)$ quando $f(z)$ é dada por:

$$\text{a)}\ \cos z, \qquad \text{b)}\ \log z \quad (\text{ramo principal}), \qquad \text{c)}\ z^{\pi} \quad (\text{ramo principal}).$$

7. Mostre que $\operatorname{Re}[\log(z-1)] = \frac{1}{2}\ln[(x-1)^2 + y^2]$ $\quad (z \neq 1)$. Por que podemos afirmar que a função $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln[(x-1)^2 + y^2]$ satisfaz à equação de Laplace (quando $(x,y) \neq (1,0)$)? (Se quiser, você pode verificar diretamente que $\partial_x^2 f + \partial_y^2 f = 0$, mas não é a ideia do problema.)