Métodos da Física Teórica I – 2019/1
2ª lista de exercícios – respostas

1. a) Basta resolver a equação $\tanh w = z$ para w, ou seja,

$$\frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} = z \Longleftrightarrow e^w - e^{-w} = (e^w + e^{-w})z \Longleftrightarrow e^w - e^w z = e^{-w} + e^{-w} z\,.$$

Multiplicando ambos os lados por e^w, obtemos

$$e^{2w} - e^{2w} z = 1 + z \Longleftrightarrow (1-z)e^{2w} = 1 + z \Longleftrightarrow e^{2w} = \frac{1+z}{1-z}\,.$$

Finalmente, tomando o $\log$ dos dois lados,

$$\log e^{2w} = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \Longleftrightarrow 2w = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \Longleftrightarrow w = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Mas, se $\tanh w = z$, então $w = \tanh^{-1} z$, o que completa a demonstração.

b) Basta resolver a equação $\operatorname{sen} w = z$ para w, ou seja,

$$\frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}) = z\,.$$

Multiplicando ambos os lados por $2i\, e^{iw}$, obtemos

$$e^{2iw} - 1 = 2iz\, e^{iw} \Longleftrightarrow e^{2iw} - 2iz\, e^{iw} - 1 = 0\,.$$

A última equação acima é uma equação do segundo grau para e^{iw}, cuja solução é dada pela fórmula usual (de Bhaskara). Logo,

$$e^{iw} = \frac{2iz + (-4z^2 + 4)^{1/2}}{2} = iz + (1 - z^2)^{1/2}\,.$$

Finalmente, tomando o $\log$ dos dois lados,

$$\log e^{iw} = \log[iz + (1-z^2)^{1/2}] \Longleftrightarrow iw = \log[iz + (1-z^2)^{1/2}] \Longleftrightarrow w = -i\log[iz + (1-z^2)^{1/2}]\,.$$

Mas, se $\operatorname{sen} w = z$, então $w = \operatorname{sen}^{-1} z$, o que completa a demonstração.

O último exercício da lista anterior pedia para encontrarmos os valores de z tais que $\operatorname{sen} z = 2$. Tais valores podem ser obtidos de forma simples uma vez que escrevemos a função inversa do seno em termos do log. De fato, os valores de z tais que $\operatorname{sen} z = 2$ são dados por

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^{-1} 2 &= -i\log[2i + (-3)^{1/2}] = -i\log[(2 \pm \sqrt{3})i] = -i\log[(2\pm\sqrt{3})e^{i(\pi/2 + 2\pi n)}] \\ &= -i\,[\ln(2\pm\sqrt{3}) + i(\pi/2 + 2\pi n)] = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \mp i\ln(2+\sqrt{3})\,, \quad (n \in \mathbb{Z})\,.\end{aligned}$$

2. $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{2}\log(1+z) - \frac{1}{2}\log(1-z)$. Uma vez que $\log\xi$ possui um ponto de ramificação em $\xi = 0$ (como vimos na aula), temos que $\tanh^{-1} z$ possui pontos de ramificação quando $z+1=0$ ou $z-1=0$, ou seja, $z=-1$ e $z=1$ são pontos de ramificação.

Como sempre, os cortes de ramificação são arbitrários, mas as duas escolhas mais comuns neste caso correspondem a remover do domínio de $\tanh^{-1} z$ os pontos da reta real tais que $-1 \leq z \leq 1$ ou os pontos da reta real tais que $z \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

A ideia dos cortes é impedir a existência, dentro do domínio da função, de um caminho fechado que contorne um ponto de ramificação. Assim, $f(z)$ será contínua ao longo de qualquer caminho fechado nesse domínio.

3. $(-i)^i = e^{-3\pi/2+2\pi n}, \quad (n \in \mathbb{Z})$.

4. a) Movimento circular uniforme.
b) $|v| = \omega R$.
c) Derivando $z(t) = R\,e^{i\omega t}$ duas vezes em relação ao tempo, obtemos $a(t) = -\omega^2 R\,e^{i\omega t} = -\omega^2 z(t)$, que tem o mesmo sentido de $-z(t)$ (porque $\omega^2 > 0$), ou seja, aponta para a origem, e tem módulo $\omega^2 R = |v|^2/R$, onde usamos o resultado do item anterior ($\omega = |v|/R$).

5. $\tan\phi = (X_L - X_C)/R, \qquad I_0^2 = V_0^2/[R^2 + (X_L - X_C)^2], \qquad$ onde $X_L := \omega L$ e $X_C := 1/(\omega C)$

Da expressão para I_0, é fácil ver que a amplitude será máxima quando $X_L = X_C$, ou seja, para $\omega = 1/\sqrt{LC}$ (porque para este valor o denominador atinge seu valor mínimo).

6. a) $f'(z) = -\operatorname{sen} z$ (Pode-se mostrar usando as definições de seno e cosseno em termos da função exponencial, o fato de que a derivada da função exponencial é ela mesma (como vimos na aula) e a regra da cadeia.)

b) $f'(z) = \frac{1}{z}$ (Primeiro, deve-se mostrar que a função é de fato analítica (para $z \neq 0$), ou seja, que a derivada existe. A maneira mais simples é escrever $\log z = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\,\operatorname{tg}^{-1}(y/x)$, $(z = x+iy, \quad x, y \in \mathbb{R})$, ou seja, $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ e $v(x,y) = \operatorname{tg}^{-1}(y/x)$, e então verificar que u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. Depois, pode-se usar que $f'(z) = \partial_x(u+iv)$.)

c) $f(z) = z^\pi := e^{\pi \log z} \Longrightarrow f'(z) = \pi z^{\pi-1}$ (Regra da cadeia junto com o resultado acima.)

7. Para mostrar aquela equação, basta escrever $\log(z-1) = u + iv$, semelhante ao que fizemos no item b) da questão anterior. Sabemos que $\log(z-1)$ é analítica para $z \neq 1$ (de fato, foi o que mostramos no item b) da questão anterior); portanto, u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. Como vimos na aula, funções que satisfazem as equações de Cauchy–Riemann satisfazem a equação de Laplace automaticamente (ou seja, são funções harmônicas).