Métodos da Física Teórica I – 2019/1
1ª lista de exercícios

1. Escreva os números abaixo na forma retangular ($x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$) e na forma polar ($re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$):

$$\text{a) } \frac{(\overline{2+i})^2}{4i-3}\,, \qquad \text{b) } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2019}, \qquad \text{c) } (1+i\sqrt{3})^{-5}\,.$$

2. Encontre as seguintes raízes (todos os possíveis valores) e as represente no plano complexo:

$$\text{a) } i^{1/3}\,, \qquad \text{b) } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2i}\right)^{1/6}.$$

3. Encontre as soluções de $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ e as represente no plano complexo.

4. Mostre que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ e $|\overline{z}| = |z|$.

5. Sejam z_0 um número complexo fixo e R uma constante real positiva. Explique por que um ponto z se situa sobre um círculo de raio R e centro em $-z_0$ quando z satisfaz a qualquer uma das seguintes equações:

$$\text{i) } |z + z_0| = R\,;$$
$$\text{ii) } z + z_0 = Re^{i\varphi}\,, \varphi \in \mathbb{R}\,;$$
$$\text{iii) } z\overline{z} + z\overline{z_0} + z_0\overline{z} + z_0\overline{z_0} = R^2\,.$$

6. Descreva o conjunto de pontos z tais que $\mathrm{Re}(e^{i\pi/2}z) \geq 2$.

7. Use a fórmula de de Moivre para mostrar que $\mathrm{sen}(4\theta) = 4\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\,\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

8. Demonstre que, se $z(i-1) = -\overline{z}(i+1)$, então z pertence à reta definida por $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ no plano complexo.

9. Sendo $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, escreva a função $f(z) = e^z$ na forma $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, com u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.

10. Encontre os valores de z tais que $\mathrm{sen}\,z = 2$.